Program Name B.Sc./B.A. (Mathematics)
B.Sc. /B.A. - Part III
Paper Code – MT- 09 (Mechanics)
Section – C
(Long Answer Questions दीर्घ ऊत्तर वाले प्रश्न)
प्रत्येक प्रश्न 14½ अंक का है Each Question Carries 14½ Marks

Q.1 (i) A particle moves with a central acceleration $\frac{u}{r^2}$ is projected with velocity V at a distance R. Show that the path is a rectangular hyperbola if the angle of projection is :

एक कण केन्द्रीय त्वरण $\frac{u}{r^2}$ से गतिमान हैं इसे R दूरी पर V वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि इसका पथ एक समकोणिक अतिपरवल होगा, यदि प्रक्षेप कोण निम्न हो।

$$sin^{-1}\left\{\frac{\mu}{V\,R\,(V^2-\frac{2\mu}{R})^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

(Ans. MT-09, p.254)

(ii) The product of Inertia of semi circular wire about its diameter and tangent at its extremity.

अर्धवृत्ताकार तार का इसके व्यास एवं इसके सिरे पर स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व–गुणन

(Ans. MT-09, p. 285)

Q.2 (i) To find central orbit when central force if given as a function of r, if the central force varies inversely as the square of the distance from a fixed point, to find the orbit.

दिये गये केन्द्रीय बल (r का फलन) के लिए सकेन्द्र कक्षा ज्ञात करना, यदि केन्द्रीय बल नियत बिन्दु से दूरी के वर्ग के व्युत्कमानुपाती हो तो सकेंन्द कक्षा ज्ञात करना।

(Ans. MT-09, p. 234)

(ii) A perfectly rough plane is in clined at an angle α to the horizon. Show that the least eccentricity of the ellipse which can rest on the plane is :

एक पूर्ण रूक्ष तल क्षैतिज से कोण α पर झुका हुआ है। प्रदर्शित कीजिए कि तल पर विरामावस्था में रह सकने वाले दीर्घवृत्त की न्यूनतम उत्केन्द्रता है:

$$\sqrt{\left(\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)}$$

(Ans. MT-09, p. 44)

Q.3 (i) A particle of unit mass is projected vertically upwards with velocity V_1 in a medium whose resistance is KV. Prove that the particle will return to the point of projection with velocity U_1 Where :

इकाई द्रव्यमान के कण को वेग के समानुपाती प्रतिरोध वाले माध्यम में ऊध्वार्धर V_1 वेग से बिन्दु A से प्रेक्षिप्त किया गया है। सिद्ध कीजिए कि कण बिन्दु A पर U_1 वेग से लौटता है जहाँ :

$$U_1 + V_1 = \frac{g}{k} log\,\frac{g+KV_1}{g-KU_1}$$

(Ans. MT-09, p. 181)

(ii) If in a SHM U, V, W be the velocities at distances a, b, c from fixed point on the straight line which is not the centre of force, show that the period T is given by the equation:

यदि सरल आवर्त गति से चलने वाले एक कण के सरल रेखा पर स्थित बिन्दु से जो बल केन्द्र नहीं है, दरी a, b, c पर वेग क्रमश: u, v, w हो तो सिद्ध कीजिए कि आवर्तकल T निम्न समीकरण द्वारा प्राप्त होता है।

$$\frac{4\pi^2}{T^2}(b-c)(c-a)(a-b) = \begin{vmatrix} U^2 & V^2 & W \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(Ans. MT-09, p. 140)

Q.4 (i) One end of an elastic string is fixed and to the other end if fastened a particle heavy enough to stretch the string to double. Its natural length a. The string is drawn vertically down till it is four times its natural length and then let go prove that the particle will return to this point in time :

$$\sqrt{\left\{\frac{a}{g}\left(2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right\}}$$

एक प्रत्यास्थ डोरी का एक सिरा स्थिर है और दूसरे स्थिर सिरे पर एक ऐसा कण बंधा हुआ है जिसका भार डोरी को उसकी दुगनी लम्बाई तक बढ़ा देता है। डोरी ऊध्वार्धर दिशा में नीचे की ओर इतनी खींची जाती है कि वह अपनी स्वभाविक लम्बाई 'a' की चार गुनी हो जाती है फिर उसे छोड़ दिया जाता है। सिद्ध कीजिए कि कण उस बिन्दु पर

$\sqrt{\left\{\frac{a}{g}\left(2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right\}}$ समय पश्चात् लोटेगा।

(Ans. MT-09, P. 160)

(ii) A particle moves under gravity in a vertical circle, sliding down the convex side of a smooth circular are. If its initial velocity is that due to a fall to the starting point form a height h above the center, show that it will fly off the circle when at a height $\left(\frac{2}{3}\right)$h above the centre.

एक कण ऊध्वार्धर वृत्त की बाहरी सह पर फिसल रहा है। यदि इसका प्रारम्भिक वेग प्रारम्भिक बिन्दु पर केन्द्र के ऊपर h ऊचाई से इस बिन्दु तक गिरने पर प्राप्त वेग के बराबर हो तो सिद्ध करो कि यह केन्द्र से $\left(\frac{2}{3}\right)$h ऊँचाई पर वृत्त से सम्पर्क छोड़ देगा।

(Ans. MT-09., P. 223)

Q.5 एक पिण्ड रूक्ष आनत समतल पर रखा है, जिसका क्षैतिक से कोण घर्षण कोण से अधिक है। यह एक ऐसे बल द्वारा रोका हुआ है जो ऊध्र्वाधर समतल में महत्तम ढाल वाली रेखा के अनुदिश है। वे सीमायें ज्ञात करना जिनके मध्य वह बल है।

A body is placed on a rough plane inclined to the horizon at an angle greater than the angle of friction, and is supported by a force acting in a vertical plane through the line of greatest slope, find the limits between which the force must lie.

Ans. [MT-09, P.No. 41]

Q.6 एक $2l$ लम्बाई की एक समान जंजीर क्षैतिज तल पर स्वयं के सिरों द्वारा लटक रही है। सिरो के मध्य दूरी $2a$ इस प्रकार है कि जंजीर का निम्नतम बिन्दु सिरों से ऊध्र्वाधर a दूरी पर है। यदि कैटिनरी के निम्नतम बिन्दु की उसकी नियता से दूरी c हो तो सिद्ध कीजिए।

A uniform chain of length $2l$ is suspendedby its ends which are on the same horizontal level. The distance apart $2a$ of the ends is such that the lowest point of the chain is at a distance a vertically below the ends. If c is the distance of the lowest point from the directrix of the catenary, then prove that

(i) $\frac{2a^2}{l^2-a^2} = \log\frac{l+a}{l-a}$ (ii) $\frac{2al}{l^2+a^2} = \tan h\frac{a}{c}$

Ans. [MT-09, P.No. 89]

MOU

Q.7 एक कण को U वेग से ऊर्ध्वाधर प्रतिरोधी माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है। यदि माध्यम का प्रतिरोध, वेग के वर्ग के समानुपाती है तो सिद्ध कीजिए कि, कण प्रक्षेपण बिन्दु पर $v = \frac{UV}{\sqrt{U^2+V^2}}$ वेग से $\frac{V}{g}\left(\tan^{-1}\frac{U}{V} + \tan h^{-1}\frac{v}{V}\right)$ समय पश्चात लौटेगा।

A particle projected upwards with a velocity U, in a medium whose resistance varies as the square of the velocity, will return to the point of projection with velocity $v = \frac{UV}{\sqrt{U^2+V^2}}$ after a time $\frac{V}{g}\left(\tan^{-1}\frac{U}{V} + \tan h^{-1}\frac{v}{V}\right)$, where V is the terminal velocity.

Ans. [MT-09, P.No. 186]

Q.8 एक कण केन्द्रीय त्वरण, जो कि दूरी के घन का व्युत्क्रमानुपाती है, से गतिशील है। यदि इसे मूल बिन्दु से a दूरी पर स्तब्धिका से ऐसे वेग से फेंका जाता है जो कि a त्रिज्या वाले वृत्त के लिए वेग का $\sqrt{2}$ गुणा है तब प्रदर्शित करो कि पथ का समीकरण $r\cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) = a$ है।

A particle moves with a central acceleration which varies inversely as the cube of the distance. If it be projected from an apse at a distance a from the origin with a velocity which is $\sqrt{2}$ times the velocity for a circle of radius a, show that the equation to its path is $r = \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) = a$.

Ans. [MT-09, P.No. 248]

Q.9 (a) A particle moves in a curve with constant velocity v. If when $S = 0$ and $\psi = 0$ any point its acceleration is $\frac{v^2}{S^2+C^2}$; then prove that the curve is a catenary.

एक कण किसी वक्र में अचर चाल v से चलता है। यदि $S = 0$ जब $\psi = 0$ और बिन्दु पर उसका त्वरण $\frac{v^2}{S^2+C^2}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि वक्र एक केटिनरी होता है।

Ans. [MT-09, P.No. 121]

(b) A point moves in a straight line with SHM has velocitieis v_1 and v_2 when its distance from the centre be x_1 and x_2. Show that the period of motion is:

$$2\pi\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$$

सरल आवर्त गति में चलने वाले किसी कण के वेग, केन्द्र से x_1 तथा x_2 दूरी पर क्रमश: v_1 तथा v_2 है। सिद्ध कीजिए कि गति का आवर्तकाल है।

$$2\pi\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$$

Ans. [MT-09, P.No. 134]

Q.10 If in a S.H.M. u, v, w be the velocities at distances a, b, c from fixed point on the straight line which is not the centre of force. Show that the period T is given by the equation

$$\frac{4\pi^2}{T_2}(b-c)(c-a)(a-b)=\begin{vmatrix} u^2 & v^2 & w^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

यदि सरल आवर्त गति में चलने वाले एक कण के किसी सरल रेखा पर स्थित एक स्थिर बिन्दु से (जो बलन नहीं है) : a,b,c दूरी पर वेग क्रमशः u,v,w हो, तो सिद्ध कीजिए कि आवर्तचल निम्न समीकरण द्वारा प्राप्त होता है।

$$\frac{4\pi^2}{T_2}(b-c)(c-a)(a-b)=\begin{vmatrix} u^2 & v^2 & w^2 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ans. [MT-09, P.No. 140]

Q.11 One end of a light elastic string of natural length a and modulus $2mg$ is attached to a fixed point O and the other end held at rest at O, is allowed to fall. Find the greatest extension of the string and show that the particle will reach again after a time

$$\left(\pi+2-\tan^{-1}2\right)\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

एक प्रत्यास्थ डोरी की स्वाभाविक लम्बाई a और प्रत्यास्थ मापांक $2mg$ है। इसका एक सिरा बिन्दु O पर बंधा है। और दूसरे सिरे से m द्रव्यमान का कण बांधा गया है। कण को बिन्दु O पर ले जाकर विरामावस्था से गिराया गया। डोरी का उच्चतम विस्तार ज्ञात करो और सिद्ध कीजिए कि कण वापिस बिन्दु O पर निम्न समय के बाद पहुँचेगा:

$$\left(\pi+2-\tan^{-1}2\right)\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

Ans. [MT-09, P.No. 162]

Q.12 (a) Find the law of force towards the pole under which a particle describes the curve $r=a\sin n\theta$

ध्रुव बिन्दु की और बल का नियम ज्ञात कीजिए जिसके अधीन कोई कण वक्र $r=a\sin n\theta$ पर गतिमान है।

Ans. [MT-09, P. No. 237]

(b) A uniform string of Mass M and length is $2l$ placed symmetrically over a smooth Pey and has particles of mass m_1 and m_2 attached to its ends. Show that when the string runs of the Pey, its velocity is

एक एकसमान डोरी की लम्बाई $2l$ एवं M द्रव्यमान है। इसके सिरो पर द्रव्यमान m_1 एवं m_2 बांधकर इसे एक चिकनी खूंटी के ऊपर सममित स्थिति में रखा गया है। सिद्ध कीजिए कि जब डोरी खूँटी को छोड़ेगी उस समय उसका वेग होगा।

$$\sqrt{\left(\frac{M+2(m_1-m_2)}{M+m_1+m_2}\right)}.\lg$$

Ans. [MT-09, P.No. 208]

Q.13 वृत्त के चाप का इसके मध्यबिन्दु से गुजरने वाली इसके तल के लम्बवत्–अक्ष के सापेक्ष जड़त्व–आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

(Find the moment of inertia of an arc of a circle about a line through mid point of arc to its plane.)

उत्तर P.N. 275 उदाहरण 3

Q.14 एक पूर्ण रूक्ष तल क्षैतिज से कोण α पर झुका हुआ है। प्रदर्शित कीजिए कि तल पर विरामावस्था में रह सकने वाले दीर्घवृत की न्यून्तम उत्केन्द्रता होगी

$$\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

(A complete rough plane is inclined at an angle α from horizontal. Show that the minimum eccentricity of ellipse such that it can remain at rest, is

$$\sqrt{\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

उत्तर P.No. 44, उदाहरण 9

Q.15 कैटनरी का नैज समीकरण व कार्तीय समीकरण व्युत्पन्न कीजिए।

(Derive the insintric equation and Cartesian equation of catenory.)

उत्तर P.No. 80-81

Q.16 किसी कण के अरीय तथा अनुप्रस्थ वेग क्रमश: λr^2 व $\mu\theta^2$ है। सिद्ध करो कि कण के पथ का समीकरण $\frac{\lambda}{\theta}=\frac{\mu}{2r^2}+C$ होगा।

और उसके त्वरण का घटक

$2\lambda^2 r^3-\frac{\mu^2\theta^4}{r}$ एवं $\lambda\mu r\theta^2+2\mu^2\frac{\theta^3}{r}$ होंगे।

(Let λr^2 and $\mu\theta^2$ are radial and transversal velocities of a particle, then prove that the path equation of path of particle is

$$\frac{\lambda}{\theta}=\frac{\mu}{2r^2}+C$$

Also, components of acceleration are

$2\lambda^2 r^3-\frac{\mu^2\theta^4}{r}$ and $\lambda\mu r\theta^2+2\mu^2\frac{\theta^3}{r}$.

$d(x,y)=\left|x^2-y^2\right|,\ \forall x,y\in R$

Q.17 चिकने कब्जों से छड़ों का एक समचतुर्भुज बनाया जाता है जिसमें प्रत्येक छड़ का भार W और लम्बाई l है। यह सममितत: इस प्रकार रखा जाता है कि इसकी उपर की दो भुजाएं एक ही स्तर पर स्थित दो चिकनी खूंटियों के सम्पर्क में रहें, दोनों खूंटियों के बीच की दूरी a है। एक भार W' निम्नतम बिन्दु पर लटकाया जाता है। यदि समचतुर्भुज की भुजाएं उध्र्वाधर से कोण θ बनाती हों तो सिद्ध कीजिए।

A rhombus is formed of rods each of weight W and length l with smooth joints. It rects symmetrically with its two upper sides in contact with two smooth pegs at the same level and at a distance 2a apart. A weight w' is hung at the lowest point. If the sides of the shombus make an angle θ with the vertical, prove that $sin^3=\frac{a(4W+W')}{l(4W+2W')}$.

(MT-09, page-69)

Q.18 एक प्रत्यास्थ डोरी का एक सिरा स्थिर है और दूसरे स्थिर सिरे पर एक ऐसा कण बंधा हुआ है जिसका भार डोरी को उसकी दुगुनी लम्बाई तक बढ़ा देता है। डोरी उध्र्वाधर दिशा में नीचे की ओर इतनी खींची जाती है कि वह अपनी स्वाभाविक

लम्बाई a की चार गुनी हो जाती है। फिर उसे छोड़ दिया जाता है। सिद्ध कीजिए कि कण उस बिन्दु पर $\sqrt{\frac{a}{g}(\sqrt[2]{3}+\frac{4\pi}{3})}$ समय पश्चात लौटेगा।

One end of an elastic string is fixed and to the other end is fastened a particle heavy enough to stretch the string to double its natural length a. The string is drawn vertically down till it is four times its natural length and then let go. Show that the particle will return to this point in time $\sqrt{\frac{a}{g}(\sqrt[2]{3}+\frac{4\pi}{3})}$.

(Ans. MT-09, page-160)

Q.19 M द्रव्यमान एवं 2l लम्बाई की समरूप जंजीर को एक चिकनी खूंटी पर सममित रूप से लटकाया गया है। यदि जंजीर के सिरों पर द्रव्यमान m_1, m_2 के कण संलग्न हो तो खूंटी से जंजीर का सम्पर्क छूटते समय जंजीर का वेग होगा $\sqrt{\frac{M+2(m_1+m_2)}{M+m_1+m_2}lg}$.

A uniform string of mass M and length 2l, is placed symmetrically over a smooth peg and has particles of masses m_1 and m_2 attached to its ends. Show that when the string runs off the peg, its velocity is. (MT-09, page-207)

Q.20 सकेन्द्र कक्षा के किसी बिन्दु पर वेग एक वृत्तीय सकेन्द्र कक्षा के एक बिन्दु जिसकी ध्रुव से दूरी उतनी है जितनी की पहले बिन्दु की है, के वेग के $\frac{1}{n}$ भाग के बराबर है तो सिद्ध कीजिए कि केन्द्रीय बल $\frac{1}{r^{2n^2+1}}$ के समानुपाती है तथा केन्द्रीय कक्षा का समीकरण निम्न है $r^{2n^2+1}=a^{n^2-1}\cos(n^2-1)\theta$.

The velocity at any point of a central orbit is $\frac{1}{n}$ th of what it would be for a circular orbit at the same distance. Show that central force varies as $\frac{1}{r^{2n^2+1}}$ and that the equation of the orbit is $r^{2n^2+1}=a^{n^2-1}\cos(n^2-1)\theta$.

(Ans. MT-09, page-238.

Q.21 Drive the formula for kinetic energy. Also state the principle of energy.

गतिज ऊर्जा के लिए सूत्र व्युत्पन्न कीजिए। साथ ही ऊर्जा सिद्धान्त लिखिए।
(Ans. MT-08, p.202)

Q.22 Obtain Moment of Inertia of Elliptic disc about its major axis.

दीर्घवृत्तीय पटल का दीर्घअक्ष के सापेक्ष जड़त्व आधूर्ण ज्ञात कीजिए।
(Ans. MT-09, p. 269)

Q.23 Two bodies M and M' are attached to the lower end of an elastic string whose upper end is fixed and arc hung at rest. M' falls off. Show that distance of M from the upper end of the string at time t is $a+b+c\cos\left[\sqrt{(g/b}\,t\right]$, where a is the unstretched length of the string, b and c the distances by which it would be extended when supporting M and M' resp.

दो पिण्ड M और M' एक प्रत्सास्थ डोरी के नीचे वाले सिरे से लटकाए जाते हैं जिसके ऊपर का सिरा स्थिर है। जब पिण्ड विरामावस्था में है तब M' गिर जाता है। सिद्ध कीजिए कि t समय पर डोरी के ऊपर वाले सिरे से M की दूरी $a+b+c\cos\left[\sqrt{(g/b}\,t\right]$, होगी जहाँ डोरी की स्वाभविक लम्बाई तथा b और c क्रमश: M तथा M' पिण्डों को लगाने से डोरी के विस्तार हैं।
(Ans. MT-09, p.)

Q.24 A particle is projected with velocity u along a smooth horizontal plane in a medium whose resistance per unit mass is k x velocity. Show that the velocity v after a time t and the distance x in that time are given by $v=ue^{-kt}$ and $x=\frac{u}{k}[1-e^{-kt}]$

m द्रव्यमान के कण का u वेग से क्षैतिज तल में प्रतिरोधी माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है। प्रतिरोधी माध्यम का प्रतिरोध m k x वेग है तो किसी क्षण t पर कण के वेग v एवं दूरी निम्न व्यंजकों से व्यक्त होती है।

वेग $v = ue^{-kt}$

दूरी $x = \frac{u}{k}[1 - e^{-kt}]$

Q.25 A cyclist and his machine together are of mass M lbs. If he rides without pedaling down an incline of angle α; with a uniform speed v ft./sec. Show that to go up an incline of angle β at the same rate he must work at $M\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\frac{v}{550}$ H.P. where $\alpha = sin^{-1}\frac{1}{m}, \beta = sin^{-1}\frac{1}{n}$

साईकिल सवार और साईकिल का सम्मिलित द्रव्यमान M पाउण्ड है। यदि सवार क्षैतिज के साथ α कोण वाले आंनत समतल पर बिना पैडल चालये नीचे की और v फुट प्रति सेकण्ड के समान वेग से चलता है तो सिद्ध कीजिये कि β कोण वाले आनत समतल पर ऊपर की ओर उसी दर से चढ़ने के लिए उसे $M\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\frac{v}{550}$ अश्वशक्ति से कार्य करना पड़ेगा। जहाँ $\alpha = sin^{-1}\frac{1}{m}, \beta = sin^{-1}\frac{1}{n}$

(Ans. MT-09, p.200)

Q.26 Derive pedal form of equation of central orbit.

संकेन्द्र कक्षा का पदिक रूप समीकरण व्युत्पित कीजिए।

(Ans. MT-09, p. 228)

Q.27 Obtain moment of Inertia of any Elliptic disk of Mass M and having semi axes a & b around a diameter of length 2r.

द्रव्यमान M और a एंव b के अर्धअक्ष वाले किसी दीर्घवृत्तीय पटल का 2r लम्बाई के किसी व्यास के परित: जड़त्व–आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

(Ans. MT-09, p. 295)

Q.28 A heavy particle is projected in a resistance medium, the resistance varies as the velocity. If v_1 and v_2 are its velocities at any point in its upward and downward paths and t the interval between its passage through this point. Prove that :

$v_1 + v_n = at\ ,\ (V - V_2) = e^{-gt/v}\ .(V + V_1)$

$V_1 + V_2 = gt$

Where V is terminal velocity

एक भारी कण को ऐसे प्रतिरोधी माध्यम में ऊध्वार्धर प्रक्षेपित किया जाता है जिसका प्रतिरोध वेग के समानुपाती है। यदि ऊध्वार्धर एवं निम्नगामी गति में कण का वेग किसी बिन्दु पर v_1 व v_2 है तथा इस बिन्दु से गुजरने का समयान्तराल t है तो सिद्ध कीजिए:

$v_1 + v_n = at\ ,\ (V - V_2) = e^{-gt/v}\ .(V + V_1)$

$V_1 + V_2 = gt$

जहाँ V अन्तिम वेग है।

(Ans. MT-09, P. 178)