

Program Name B.Sc./B.A. (Mathematics)
B.Sc. /B.A. - Part III
Paper Code – MT- 08 (Complex Analysis)
Section – C

(Long Answer Questions दीर्घ उत्तर वाले प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न 14 अंक का है Each Question Carries 14 Marks

Q.1 प्रदर्शित कीजिए कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत्त में एक विश्लेषिक फलन होती है।
Show that a power series represents an analytic function inside its circle of convergence.

Ans. [MT-08, P.No.116]

Q.2 Find all the bilinear transformation which transforms the circle $|z| \leq r$ into the circle $|w| \leq R$.

वे समस्त द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो वृत्त $|z| \leq r$ को वृत्त $|w| \leq R$ में प्रतिचित्रित करे।

Ans. [MT-08, Page 162]

Q.3 State and prove Maximum-Modulus theorem.

महत्तम मापांक प्रमेय को लिखिए व सिद्ध कीजिए।

Ans. [MT-08, P.No.247]

Q.4 Prove that the polynomial $z^5 + z^3 + 2z + 3$ has just one zero in the first quadrant of the complex plane.

सिद्ध कीजिए कि बहुपद का सम्मिश्र तल के प्रथम चतुर्थांश में केवल एक ही शून्य है।

Ans. [MT-08, P.309]

(5) State and prove Cauchy-Hadamard theorem.

कोशी-हाडामार्ड प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, p.110)

(6) Find all the Bilinear transformations which transform the half plane $I(z) \geq 0$ into circles $|w| \leq 1$.

ऐसे सभी द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो ऊपरी अर्धतल $I(z) \geq 0$ को वृत्त $|w| \leq 1$ में प्रतिचित्रित करें।

(Ans. MT-08, p. 159)

(7) State and prove Cauchy's fundamental theorem.

कोशी का मूल प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, p. 200)

(8) Prove $\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \log 2$ by contour integral.

परिरेखा समाकल द्वारा सिद्ध कीजिए कि $\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \log 2$

(Ans. MT-08, P. 331)

(9) Prove that a stereographic projection projects circles into circles or straight lines.

सिद्ध कीजिए कि एक त्रिविम प्रक्षेप को वृत्तों में या सरल रेखाओं में प्रक्षेप करता है।

(Ans. MT-08, p.18)

(10) Find an analytic function $f(z) = u + iv$ in terms of z where $u + v = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}$

यदि $u + v = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}$ तथा $f(z) = u + iv$ एक विश्लेषिक फलन हों तो $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

(Ans. MT-08, p. 85)

(11) Discuss transformation $w = \log z$

रूपान्तरण $w = \log z$ की विवेचना कीजिए।

(Ans. MT-08, p. 184)

(12) State and prove Rouché's theorem.

रूशे प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, P. 304)

(13) Prove that the area of a triangle whose vertices are the points Z_1, Z_2, Z_3 on the Argand diagram in

$$\sum \frac{(z_2 - z_3) |z_1|^2}{4izi}$$

Show that the triangle is equilateral if $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

सिद्ध कीजिए कि आर्गण्ड चित्र में बिन्दुओं z_1, z_2, z_3 शीर्ष वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल है $\sum \frac{(z_2 - z_3) |z_1|^2}{4izi}$

प्रदर्शित कीजिए कि त्रिभुज समबाहु होगा यदि $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ (Ans. MT-08, p.22)

(14) Every power series possesses derivatives of all orders within its circle of convergence and these derivatives are obtained through term by term differentiation of the series.

प्रत्येक घात श्रेणी के उसके अभिसरण वृत्त में सभी क्रम के अवकलन प्राप्त किये जा सकते हैं तथा ये अवकलन घात श्रेणी के पदशः अवकलन से प्राप्त होते हैं।

(Ans. MT-08, p. 116, 5.12)

(15) Let $f(z)$ be analytic in a simply connected domain G .

If C is any closed contour in G then $\int_C f(z) dz = 0$

माना एकशः सम्बद्ध प्रदेश G में विश्लेषिक $f(z)$ फलन है। यदि G में C कोई संवृत कन्टूर हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\int_C f(z) dz = 0$$

(Ans. MT-08, p. 200)

(16) Let $f(z)$ be analytic inside and on a simple closed contour C except for a finite number of poles inside C , and suppose $f(z) \neq 0$ on C . If N and P are respectively, the number of zeros and poles inside C (each zero or pole of order m , being counted m zeros or poles as the case may be), then

माना $f(z)$ संवृत परिरेखा C पर तथा उसके अन्दर स्थित परिमित अनन्तकों के अतिरिक्त सभी बिन्दुओं पर विश्लेषिक हैं तथा माना कि C पर $f(z) \neq 0$ यदि N तथा P क्रमशः C के अन्दर स्थित शून्यों एवं अनन्तकों की संख्या हैं (यहाँ कोटि m के प्रत्येक शून्य या अनन्तक की गणना शून्य या m अनन्तक की गयी है), तो

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

(Ans. MT-08, P. 301)

(17) Show that the function $f(z) = e^{-z^{-4}}$, $z \neq 0$ and $f(0) = 0$ is not analytic at $z = 0$, although Cauchy-Riemann equations are satisfied at the point. How would you explain this?

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(z) = e^{-z^{-4}}$, $z \neq 0$ तथा $f(0) = 0$ पर विश्लेषिक नहीं है यद्यपि इस बिन्दु पर कोशी रीमान समीकरण सन्तुष्ट होती है। इसको आप कैसे स्पष्ट करेंगे?

(Ans. MT-08, p.72)

(18) Show by means of the transformation $W = \left(\frac{z-ic}{z+ic}\right)^2$ the upper half of the w -plane may be made to correspond to the interior of a certain semi circle in the z -plane.

रूपान्तरण $W = \left(\frac{z-ic}{z+ic}\right)^2$ के लिए प्रदर्शित कीजिए कि w -समतल का ऊपरी अर्धभाग z -समतल में किसी अर्धवृत्त के अन्तः भाग के संगत है।

(Ans. MT-08, p. 132)

(19) State and prove Poisson's Integral formula.

पवासों के समाकलन सूत्र लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, p. 200)

(20) Discuss singularities of $f(z) = \frac{e^{c/(z-a)}}{e^{z/a}-1}$

फलन $f(z) = \frac{e^{c/(z-a)}}{e^{z/a}-1}$ की विचित्रताओं की विवेचना कीजिए।

(Ans. MT-08, P. 281)

(21) Discuss stereographic projection of complex numbers.

सम्मिश्र संख्याओं के त्रिविम प्रक्षेप की व्याख्या कीजिए।

(Ans. MT-08, p.16)

(22) Prove that following functions satisfy Laplace equation. Determine corresponding analytic function in each case.

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। प्रत्येक स्थिति में संगत विश्लेषिक फलन

$$f(z) = u + i v \text{ भी ज्ञात कीजिए।}$$

(a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$

(b) $u(x, y) = e^{-x}[(x^2 - y^2) \cos y + 2xy \sin y]$

(Ans. MT-08, p. 100)

(23) Find all the bilinear transformation which transform $R(z) \geq 0$ into the unit disc $|w| \leq 1$

वे सभी द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो अर्धतल $R(z) \geq 0$ के इकाई डिस्क $|w| \leq 1$ में रूपान्तरित करें।

(Ans. MT-08, p. 166)

(25) State and prove Taylor's theorem.

टेलर प्रमेय का कथन लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, P. 237)

(26) State and prove sufficient condition for $f(z)$ to be analytic.

विश्लेषिक फलन होने का पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, p.65)

(27) Discuss the transformation $w = e^z$

रूपान्तरण $w = e^z$ की विवेचना करें।

(Ans. MT-08, p. 177)

(28) State and prove casorati-weirstrass theorem.

केसोरती वायस्ट्रास प्रमेय को लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, p. 271)

(28) Prove by contour integral

परि रेखा समाकल द्वारा सिद्ध कीजिए।

$$\int_{\gamma} \frac{\sin \pi x}{x(1-x)^2} dx = \pi$$

(Ans. MT-08, P. 339)