

Program Name B.Sc./B.A. (Mathematics)
B.Sc. /B.A. - Part III
Paper Code – MT- 08 (Complex Analysis)
Section – B

(Short Answer Questions लघु उत्तर वाले प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है Each Question Carries 6 Marks

Q.1 If $|z_1| = |z_2|$ and $\arg z_1 + \arg z_2 = 0$ then prove that z_1 and z_2 are conjugate numbers.

यदि $|z_1| = |z_2|$ तथा $\arg z_1 + \arg z_2 = 0$ तो सिद्ध कीजिए कि z_1 और z_2 संयुग्मी संख्याये हैं।

Ans. [MT-08, Page 21]

Q.2 Prove that $f(z)$ is analytic at z_0 then it is necessarily continuous at z_0 . Show that its converse is not necessary true by giving an example.

सिद्ध कीजिए कि $f(z)$ पर z_0 विश्लेषिक है तो वह z_0 पर आवश्यक रूप से संतत है। एक उदाहरण देकर प्रदर्शित कीजिए कि इसका विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं है।

Ans. [MT-08, Page 72]

Q.3 Determine corresponding region of infinite strip $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ in w -plane under the

transformation $w = \frac{1}{z}$.

रूपान्तरण $w = \frac{1}{z}$ के अन्तर्गत अनन्त पट्टी का $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$, w -समतल में समवर्ती क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-08, P.No.135]

Q.4 Under the transformation $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ and by considering $\arg \left(\frac{w-1}{w+1} \right) = 2\lambda$, prove that any circle through two points $w = \pm 1$ corresponds to two circles in the z -plane.

रूपान्तरण $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ के अन्तर्गत प्रदर्शित कीजिए कि w -समतल में बिन्दु $w = \pm 1$ से जाने वाले किसी भी

वृत्त $\arg \left(\frac{w-1}{w+1} \right) = 2\lambda$ के संगत z -समतल में दो वृत्त होंगे।

Ans. [MT-08, P.No. 189]

Q.5 State and prove extension of Cauchy integral formula for multi connected region.

बहुसम्बन्धित क्षेत्र के लिए कोशी समाकल सूत्र को लिखिए व सिद्ध कीजिए।

Ans. [MT-08, Page 218]

Q.6 अपनेय विचित्रता के लिए रीमान प्रमेय का कथन लिखिए व सिद्ध कीजिए।

State and prove Reimann theorem on removable singularities.

Ans. [MT-08 Page 269]

Q.7 If AB is the arc $\alpha \leq \theta \leq \beta$ of the circle $|z-a| = r$ and if $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = k$ then show

that $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{AB} (z-a)f(z) = k$.

माना AB वृत्त $|z-a| = r$ का चाप $\alpha \leq \theta \leq \beta$ है। यदि $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = k$ तो सिद्ध कीजिए

$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{AB} (z-a)f(z) = k$

Ans. [MT-08, Page 323]

Q.8 Verify Cauchy's theorem for the function $z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ if C is the circle $|z-1|=2$.

यदि C एक वृत्त $|z-1|=2$ हो तो फलन $z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ के लिए कोशी समाकल प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Ans. [MT-08, P.No. 212]

(9) Is the sequence $\left\{\frac{n^2 i^n}{n^3+1}\right\}$ convergent?

क्या अनुक्रम $\left\{\frac{n^2 i^n}{n^3+1}\right\}$ अभिसारी है?

(Ans. MT-08, P.37)

(10) Show that the function $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ is harmonic.

प्रदर्शित कीजिए फलन $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ प्रसवादी फलन है।

(Ans. MT-08, P.82)

(11) In the transformation $z = \frac{i-w}{i+w}$, show that half of w -plane given by $v \geq 0$ corresponds to the circle $|z| \leq 1$ in the z -plane.

प्रदर्शित कीजिए कि रूपान्तरण $z = \frac{i-w}{i+w}$ के अन्तर्गत, w -समतल का धनात्मक अर्धतल $v \geq 0$ के समवर्ती z -समतल में वृत्त $|z| \leq 1$ है।

(Ans. MT-08, P.134)

(12) Show that $\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ where C is $|z-a| = \delta$

सिद्ध कीजिए कि $\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ जहाँ C है $|z-a| = \delta$

(Ans. MT-08, P.209)

(13) Expand $\cos z$ in the neighborhood of $z = \pi/2$

बिन्दु $z = \frac{\pi}{2}$ के सामीप्य में $\cos z$ का प्रसार कीजिए।

(Ans. MT-08, P.249)

(14) Find the residue at $z = -3$ of $\frac{z^2+16}{(z-i)^2(z+3)}$

$A = -3$ पर $\frac{z^2+16}{(z-i)^2(z+3)}$ का अवशेष ज्ञात कीजिए।

(Ans. MT-08, P.300)

(15) Show that the series $\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \dots$ And $\frac{1}{2-i} + \frac{z-i}{(2-i)^2} + \frac{(z-i)^2}{(2-i)^3} + \dots$

सिद्ध कीजिए कि श्रेणियाँ $\frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \dots$ तथा $\frac{1}{2-i} + \frac{z-i}{(2-i)^2} + \frac{(z-i)^2}{(2-i)^3} + \dots$ एक दूसरे का विश्लेषिक सांतत्य हैं।

(Ans. MT-08, P.356)

(16) Find the locus of z for which $\text{amp} \left[\frac{z-1}{z+1} \right] = \pi/3$

Z का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जबकि $\text{amp} \left[\frac{z-1}{z+1} \right] = \pi/3$

(Ans. MT-08, P.21)

(17) Show that the triangles whose vertices are Z_1, Z_2, Z_3 and Z_1', Z_2', Z_3' are directly similar if.

प्रदर्शित कीजिए यदि दो त्रिभुजों जिनके शीर्ष बिन्दु क्रमशः Z_1, Z_2, Z_3 तथा Z_1', Z_2', Z_3' सीधे समरूप होते हैं, यदि

$$\begin{vmatrix} Z_1 & Z_1' & 1 \\ Z_2 & Z_2' & 1 \\ Z_3 & Z_3' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Ans. MT-08, P.22)

(18) Prove that $f(z) = \bar{z}$ is not differential at any point.

सिद्ध कीजिए कि $f(z) = \bar{z}$ किसी भी बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

(Ans. MT-08, P.54)

(19) Find the radius of convergence of following series.

निम्न घात श्रेणी की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}z^2 \dots\dots\dots$$

(Ans. MT-08, P.115)

(20) Find the image of z-plane bounded by $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ under the transformation $w = 2z$. Also find type of this transformation.

रूपान्तरण $w = 2z$ के अन्तर्गत z-plane में रेखाओं $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$ से परिसीमित क्षेत्र का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए। यह किस प्रकार का रूपान्तरण है?

(Ans. MT-08, P.148)

(21) Evaluate $\int_C (z^2 + 3z + 2)dz$ where C is arc of cycloid $x = a(\theta + \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ joining $(0, 0)$ and $(\pi a, 2a)$

मान ज्ञात कीजिए $\int_C (z^2 + 3z + 2)dz$ जहाँ C चक्रज $x = a(\theta + \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ का बिन्दुओं $(0, 0)$ तथा $(\pi a, 2a)$ के मध्य चाप है।

(Ans. MT-08, P.211)

(22) Discuss singularities of $f(z) = \frac{e^{c/(z-a)}}{e^{z/a}-1}$

फलन $f(z) = \frac{e^{c/(z-a)}}{e^{z/a}-1}$ की विचित्रताओं की विवेचना कीजिए।

(Ans. MT-08, P.281)

(23) Evaluate मान ज्ञात करो

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos \theta}$$

(Ans. MT-08, P.318)

(24) Show that the power series $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}$ cannot be continued analytically beyond the circle $|z| = 1$

सिद्ध कीजिए कि घात श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}$ का वृत्त $|z| = 1$ से आगे विश्लेषिक सांतत्य नहीं किया जा सकता है।

(Ans. MT-08, P.359)

(25) Prove that a sequence $\langle Z_n \rangle$ is convergent if it is a Cauchy sequence.

एक अनुक्रम $\langle Z_n \rangle$ अभिसारी होगा यदि वह एक कोशी अनुक्रम है।

(Ans. MT-08, P.31)

(26) State and prove necessary condition for an analytic function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ किसी फलन के विश्लेषिक फलन होने की आवश्यक प्रतिबन्ध को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, P.61)

(27) Find the image of strip $0 \leq \text{Im}(z) \leq \frac{1}{2}$ under $w = \frac{1}{z}$

पट्टी $0 \leq \text{Im}(z) \leq \frac{1}{2}$ का प्रतिबिम्ब, प्रतिचित्रण $w = \frac{1}{z}$ के अन्तर्गत ज्ञात कीजिए।

(Ans. MT-08, P.140)

(28) Show that the transformation $w = z^2$ transform the circle $|z - a| = b$ in z -plane to the limaçon in the w -plane.

प्रदर्शित कीजिए कि रूपान्तरण $w = z^2$ के अन्तर्गत z - समतल व वृत्त $|z - a| = b$ का प्रतिचित्रण w - समतल में लिमेंसा है।

(Ans. MT-08, P.227)

(29) State and prove Cauchy's Inequality.

कोशी असमिका का कथन लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, P.227)

(30) Describe types of Isolated singularities.

वियुक्त विचित्रता के प्रकारों की विवेचना कीजिए।

(Ans. MT-08, P.264)

(31) If AB is the arc $\alpha \leq \theta \leq \beta$ of the circle $|z| = R$ and if $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = k$ then show $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{AB} f(z) dz = i(\beta - \alpha)k$.

$$\int_{AB} f(z) dz = i(\beta - \alpha)k.$$

यदि AB वृत्त $|z| = R$ का चाप $\alpha \leq \theta \leq \beta$ हैं तथा यदि $\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = k$ तो सिद्ध कीजिए $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{AB} f(z) dz = i(\beta - \alpha)k$.

$$\int_{AB} f(z) dz = i(\beta - \alpha)k.$$

(Ans. MT-08, P.324)

(32) Prove that सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad |a| > |b|$$

(Ans. MT-08, P.342)

(33) Find the locus of z when $(Z$ का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जबकि)

$$(a) \text{amp} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = n/3 \quad (b) \left| \frac{z-i}{z+i} \right| \geq 2$$

(Ans. MT-08, P.13)

(34) Prove that $w = |z|^2$ is continuous everywhere but nowhere differentiable except at origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = w = |z|^2$ सर्वत्र संवत है परन्तु मूल बिन्दु के तिरिक्त कहीं भी अवकलनीय नहीं है।

(Ans. MT-08, P.55)

(35) Test the uniform convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$ in the interval $1 < |z| < 2$

अन्तराल $1 < |z| < 2$ में श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$ के एक समान अभिसरण की जाँच करो।

(Ans. MT-08, P.107)

(36) Determine the corresponding region of w-plane bounded by lines $x = 0, y = 0, x + y = 1$ in z-plane under transformation $W = \sqrt{2} e^{in/4} z$ and write the type of this transformation.

रूपान्तरण $W = \sqrt{2} e^{in/4} z$ के अन्तर्गत z-समतल की रेखाओं $x = 0, y = 0, x + y = 1$ से परिसीमित क्षेत्र का w-समतल में प्रतिचित्रण प्राप्त कीजिए। यह किस प्रकार का रूपान्तरण है?

(Ans. MT-08, P.149)

(37) State and prove Cauchy –integral theorem.

कोशी समाकल प्रमेय को लिखिए व सिद्ध कीजिए

(Ans. MT-08, P.199)

(38) Prove that (सिद्ध कीजिए कि)

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n})$$

Where (जहाँ) $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cosh(2\cos\theta) d\theta$

(Ans. MT-08, P.256)

(39) State and prove fundamental theorem of algebra.

बीजगणित का मूल प्रमेय लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, P.306)

(40) Show that the function $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \frac{z^3}{a^4} + \dots$ can be continued analytically outside the circle of convergence.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \frac{z^3}{a^4} + \dots$ का विश्लेषिक सांतत्य अभिसरण वृत्त के बाहर किया जा सकता है।

(Ans. MT-08, P.354)

(41) Consider a point set $S = \left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$. Are S is bounded, closed, open, connected or compact set? Find limit, interior and boundary points of S. Is S and open region?

माना कि $S = \left\{\frac{1}{n}, n \in N\right\}$ क्या S परिवद्ध, संवृत, विवृत, सम्बद्ध अथवा संहत समुच्चय है। S के सीमा, आन्तरिक एवं परिसीमा बिन्दु भी ज्ञात कीजिए। क्या S एक विवृत समुच्चय है?

(Ans. MT-08, P.35)

(42) If $f(z) = \frac{x^3y(y-ix)}{x^6+y^2}, z \neq 0$ and $f(0) = 0$ then show that $\frac{f(z)-f(0)}{z} \rightarrow 0, as z \rightarrow 0$ along any radius vector but not $z \rightarrow 0$ in any manner. Is $f(z)$ is analytic at $z = 0$?

यदि $f(z) = \frac{x^3y(y-ix)}{x^6+y^2}, z \neq 0$ तथा $f(0) = 0$ तो सिद्ध करो कि $\frac{f(z)-f(0)}{z} \rightarrow 0$

जब z किसी भी ध्रुवान्तर रेखा के अनुदिश शून्य की ओर अग्रसर होता है। परन्तु जब z किसी भी प्रकार शून्य को अग्रसर होता हो तो ऐसा नहीं होगा। क्या फलन $z = 0$ पर विश्लेषिक है?

(Ans. MT-08, P.75)

(43) Determine the points where mapping $f(z) = 3z + z^2$ is not conformed.

उन बिन्दुओं को प्राप्त कीजिए जहाँ प्रतिचित्रण $f(z) = 3z + z^2$ अनुकोणीय नहीं है।

(Ans. MT-08, P.140)

(45) Show that the mapping $z = \sqrt{w}$ transforms the family of circles $|w - 1| = a$ into the family of lemniscates $|z - 1||z + 1| = a$, where a is a parameter.

प्रदर्शित कीजिए कि रूपान्तरण $z = \sqrt{w}$ z -समतल में वृत्त कुल $|w - 1| = a$ को z -समतल में लेमनिस्केट कुल $|z - 1||z + 1| = a$ पर प्रतिचित्रित करता है जहाँ a प्राचल है।

(Ans. MT-08, P.186)

(46) State and prove Cauchy's inequality.

कोशी असमिका को लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, P.227)

(47) Prove that a function which has no singularity in the finite part of the complex plane or at infinity is constant.

सिद्ध कीजिए कि यदि किसी फलन की सम्मत तल के परिमित अंश में या अनन्त पर, कोई विचित्रता नहीं हो तो, फलन अचर है।

(Ans. MT-08, P.274)

(48) Prove that all the roots of $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ lie between the circles $|z| = 1$ and $|z| = 2$.

सिद्ध कीजिए कि समीकरण $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ के सभी मूल वृत्तों $|z| = 1$ व $|z| = 2$ के मध्य स्थित हैं।

(Ans. MT-08, P.309)

(49) Show by contour integral.

परि रेखा समाकल से सिद्ध करो।

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(Ans. MT-08, P.336)

(50) Prove that सिद्ध करो कि

$$\left| \frac{a-b}{1-ab} \right| < 1, \text{ यदि } |a| < 1 \text{ तथा } |b| < 1$$

(Ans. MT-08, P.21)

(51) Show that $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ is differentiable everywhere.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय है।

(Ans. MT-08, P.54)

(51) State and prove Weierstrass M-test for convergence of a power series.

घात श्रेणी के अभिसरण के लिए वायस्ट्रस M परीक्षण को लिखिए व सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-08, P.104)

(52) Find the bilinear transformation which transformation which transforms points $Z = 0, i, \infty$ into the points $w = \infty, i, 0$

वह द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = 0, i, \infty$ को $w = \infty, i, 0$ में प्रतिचित्रित करे।

(Ans. MT-08, P.157)

(53) State and prove Cauchy integral theorem.

कोशी समकाल प्रमेय का कथन लिखिए व सिद्ध कीजिए

(Ans. MT-08, P.199)

(54) Expand $\frac{z^2-4}{(z+1)(z+4)}$ which are valid in the following regions.

फलन $\frac{z^2-4}{(z+1)(z+4)}$ का प्रसार करो जो कि निम्न क्षेत्र के लिए वैध हो:

(i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 4$ (iii) $|z| > 4$

(Ans. MT-08, P.252)

(55) Evaluate the residues of $\frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ at $z = 1, 2, 3$ and infinity and show that their sum is zero.

फलन $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ का $z = 1, 2, 3$ व अनन्त पर अवरोध ज्ञत कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि उनका योग शून्य है।

(Ans. MT-08, P.299)

(56) Show that the power series $Z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \dots$ May be analytically continued to a wide range by means of the series. $\log 2 - \frac{(1-z)}{2} - \frac{1}{2} \frac{(1-z)^2}{2^2} - \frac{1}{3} \frac{(1-z)^3}{2^3} - \dots$

सिद्ध करो कि घात श्रेणी $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \dots$ का विश्लेषिक सांतत्य घात श्रेणी $\log 2 - \frac{(1-z)}{2} - \frac{1}{2} \frac{(1-z)^2}{2^2} - \frac{1}{3} \frac{(1-z)^3}{2^3} - \dots$ द्वारा वृहत् क्षेत्र में किया जा सकता है

(Ans. MT-08, P.352)