

Program Name B.Sc./B.A. (Mathematics)

B.Sc. /B.A. - Part III

Paper Code – MT- 08 (Complex Analysis)

Section – A

(Very Short Answer Questions अति लघु उत्तर वाले प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है Each Question Carries 2 Marks

Q.1 Write all the n^{th} root of unity.

इकाई के सभी n वें मूल लिखिए।

Ans. $e^{2r\pi i/n}$, $r = 1, 2, 3, \dots, n$

Q.2 For what values of z following function are continuous.

z के किन मानों के लिए निम्न फलन संतत है।

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

Ans. $z = \pm i$ के अलावा प्रत्येक बिन्दु पर संतत है।

Q.3 If u and v are harmonic conjugate functions then value of dv .

यदि u तथा v संयुग्मी प्रसवादी फलन है तो dv का मान होगा।

Ans. $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$

Q.4 Write formula for radius R of convergenc of a power series $\sum a_n z^n$.

घात श्रेणी $\sum a_n z^n$ की अभिसरण त्रिज्या R ज्ञात करने के लिए सूत्र लिखिए।

Ans. $\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$ या $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Q.5 Define invariant points of a transformation.

किसी रूपान्तरण के निश्चर बिन्दु (स्थिर बिन्दु) को परिभाषित कीजिए।

Ans. रूपान्तरण के अन्तर्गत जिन बिन्दुओं का प्रतिचित्रण उनके संपाती हो वे रूपान्तरण के स्थिर बिन्दु कहलाते हैं।

Q6 Is the Cauchy theorem applicable for $f(z) = \frac{z^2 + 5z + 6}{z - 2}$ when path of integration is a

circle $C : |Z| = 3$.

$f(z) = \frac{z^2 + 5z + 6}{z - 2}$ के लिए क्या कोशी प्रमेय को लागू किया जा सकता है जबकि समाकलन का पथ एक वृत्त

$C : |Z| = 3$ हो।

Ans. नहीं

Q.7 Which series we obtained when we put $a = 0$ in Taylor's series.

टेलर श्रेणी में $a = 0$ हो तो हमें कौनसी श्रेणी प्राप्त होगी।

Ans. मैक्लारिन श्रेणी

(8) Write general form of a straight line in complex plane.

सम्मिश्र समतल में सरल रेखा की व्यापक समीकरण लिखिए।

A. $z\bar{b} + b\bar{z} = c$

(9) State Heine – Borel theorem.

हेन बेरेल प्रमेय का कथन लिखिए।

Ans. Every closed and bounded set is a compact set.

(10) Write the number of zeros of $z^3 - 5z + 1$.

$z^3 - 5z + 1$ के शून्यों की संख्या लिखिए।

Ans.3

(11) If C be the continuous rectifiable curve joining point a and b then value of $\int_C z dz$

यदि C बिन्दुओं a तथा b को मिलाने वाला संतत चापकलनीय वक्र हो तो समाकल $\int_C z dz$ का मान होगा।

Ans. $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

(12) Write mapping which represents rotation.

घूर्णन को व्यक्त करने वाला प्रतिचित्रण लिखिए।

Ans. $W = az, a \in C$

(13) If it possible to find more than one analytic continuation of an analytic function in a domain.

Ans.No.

(14) Write Cauchy-Riemann equations.

कोशी-रीमान समीकरण लिखिए।

Ans. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

(15) Write general form of a circle in complex plane.

सम्मिश्र समतल में वृत्त का व्यापक समीकरण लिखिए।

Ans. $z\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$

(16) If the series $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ is convergent then value of $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

यदि श्रेणी $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ अभिसृत है तो $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ का मान है

Ans. 0

(17) If a function u defined in a domain D satisfy Laplace equation then it is called as.

यदि किसी प्रान्त D में परिभाषित फलन u लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है तो वह कहलाता है।

Ans. Harmonic function (प्रसवादी फलन)

(18) If a power series $\sum anz^n$ is convergent at $z = z_0 \neq 0$ then at What value of z it is absolute convergent.

यदि घात श्रेणी $\sum anz^n, z = z_0 \neq 0$ पर अभिसारी है तो के किस मान के लिए यह निपरेच अभिसारी होगी।

Ans. $|z| < |z_0|$

(19) Write the formula for nth derivative of an analytic function.

विश्लेषिक फलन के n वें क्रम के अवकलन का मान लिखिए।

$$\text{Ans. } f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} ; n = 0, 1, 2, 3$$

(20) Write pdes of $\frac{z+2}{(z-1)(z^2+1)}$

$\frac{z+2}{(z-1)(z^2+1)}$ के अनन्तक लिखिए।

$$\text{Ans. } Z=1, \pm i$$

(21) Define cross-cut.

क्रास कट को परिभाषित कीजिए।

Ans. बहुसम्बन्धित क्षेत्र में खींची गई उन रेखाओं को क्रासकट कहते हैं जो किसी वक्र को न काटती हो तथा बहुसम्बन्धित क्षेत्र को एकशः सम्बद्ध क्षेत्र में परिवर्तित कर दे।

(22) If (यदि) $z_1 = 2 + i, z_2 = 3 - 2i$ then (तो) $|3z_1 - 4z_2| =$

$$\text{Ans. } \sqrt{157}$$

(23) Write points of discontinuity of $\frac{2x-3}{z^2+2x+2}$

फलन $\frac{2x-3}{z^2+2x+2}$ के असांत्य बिन्दु लिखिए।

$$\text{Ans. } -1 \pm i$$

(24) What are relation between radius of convergence of power series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

घात श्रेणियों $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ तथा $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ की अभिसरण त्रिज्याओं में सम्बन्ध बताइये।

Ans. दोनों समान होंगी।

(25) Write the transformation which represents translation.

स्थानान्तरण को व्यक्त करने वाला रूपान्तरण लिखिए।

$$\text{Ans. } W = Z + \alpha = Z + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$$

$$(26) \int_C |dz| = ?$$

Ans. चाप C की लम्बाई (Length of arc C)

(27) State Liouville's theorem.

ल्यूवेल प्रमेय का कथन लिखिए।

Ans. Every Entire function is constant.

प्रत्येक सर्वत्र विश्लेषिक फलन अचर होता है।

(28) Write poles of $f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$

$f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$ के अनन्तक लिखिए।

Ans. $Z = 3i, -3i$

(29) Function which defined on positive integers is known as –

धनात्मक पूर्णांकों पर परिभाषित फलन कहलाता है—

Ans. Sequence (अनुक्रम)

(30) Write Cauchy-riemann equations in polar form.

कोशी रोमान समीकरण का ध्रुवीय रूप लिखिए।

Ans. $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$

(31) Write necessary condition for a conformal mapping representation.

अनुकोण प्रतिचित्रण के निरूपण के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिए।

Ans. यदि फलन $w = f(z)$, जिसका z -समतल में प्रान्त D है w -समतल के प्रान्त D' में अनुकोणीय है, तो $f(z)$ प्रान्त D में z का एक विश्लेषिक फलन है।

(32) Transformation $W = z^2$ transform $y = \pm c$ in –

प्रतिचित्रण $w = z^2$ सरल $y = \pm c$ रेखा को प्रतिचित्रित करता है—

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| (i) Hyperbola (अतिपरवलय) | (ii) Parabola (परवलय में) |
| (iii) Circle (वृत्त में) | (iv) Ellipse (दीर्घवृत्त में) |

Ans. Parabola (परवलय में)

(33) State Morera's theorem

मोरेरा प्रमेय लिखिए।

Ans. यदि एक श: $f(z)$ सम्बद्धित क्षेत्र G में सतत है एवं G के प्रत्येक सरल संवृत कंटूर C के अनुदिश $\int_C f(z)dz = 0$ है तो में विश्लेषिक है।

Let $f(z)$ be continuous function in a simply connected domain G . If $\int_C f(z)dz = 0$, along every simple closed contour C in G , then $f(z)$ is analytic in G .

(34) Define poles.

अनन्तक को परिभाषित कीजिए।

Ans. If principal part of $f(z)$ contains finite number of terms then isolated singularity is called a pole.

यदि $f(z)$ के लौरां प्रसार में मुख्य भाग में पदों की संख्या सीमित हो तो वियुक्त विचित्रता अनन्तक कहलाती है।

(35) If AB is the arc $\alpha \leq \theta \leq \beta$ of the circle $|z| = R$ and if $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = k$ then value of

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{AB} f(z)dz$ is-

यदि AB वृत्त $|z| = R$ का चाप $\alpha \leq \theta \leq \beta$ है तथा यदि $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = k$ तो $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{AB} f(z)dz$ का मान क्या होगा?

Ans. $L^0(\beta - \alpha)k$

(36) Amplitude of zero is (शून्य संख्या का कोणांक है—)

Ans. Undefined (अपरिभाषित)

(37) Define uniform continuity.

एकसमान सांतत्य को परिभाषित कीजिए।

Ans. A function $f(z)$ is said to be uniformly continuous in D if $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ for every pair of points $z_1, z_2 \in D$ such that $|z_1 - z_2| < \delta$ (δ depending only on ϵ)

एक संख्या $\delta > 0$ प्राप्त करना संभव है जो कि केवल ϵ पर निर्भर करे ताकि क्षेत्र D में प्रत्येक बिन्दु युग्म z_1, z_2 के लिए $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$ जबकि $|z_1 - z_2| < \delta$

(38) Find radius of convergence of power series $\sum \frac{z^n}{n^n}$

घात श्रेणी $\sum \frac{z^n}{n^n}$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Ans. $a^n = \frac{1}{n^n} \therefore a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) = e \cdot \infty = \infty$$

(39) Write types of basic transformation.

मूलभूत रूपान्तरण कौन-कौन से हैं?

Ans. स्थानान्तरण (Translation), घूर्णन (Rotation), आवर्धन (Magnification), घूर्णन तथा आवर्धन (Rotation and magnification) तथा व्युत्क्रमण (Inversion).

(40) Define bounded set परिबद्ध समुच्चय किसे कहते हैं?

Ans. A set S is called a bounded set if there exist a positive number M such that $|z| \leq M, \forall z \in S$

एक समुच्चय S परिबद्ध समुच्चय कहलाता है यदि कोई धनात्मक संख्या M इस प्रकार विद्यमान है कि $|z| \leq M, \forall z \in S$

(41) Write Laurent's series when $b_n = a - n$

लौरा प्रमेय में यदि $b_n = a - n$ हो तो लौरा प्रमेय की श्रेणी लिखो।

Ans. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$

(42) State fundamental theorem of algebra.

बीजगणित का मूल प्रमेय लिखिए।

Ans. Every polynomial of degree $n (\geq 1)$ has at least one zero.

(43) Define limit point of a set. समुच्चय के सीमा बिन्दु को परिभाषित करो।

Ans. A point a is said to be a limit point of set S if each neighborhood of a contains at least one point of S other than a एक बिन्दु a समुच्चय S का सीमा बिन्दु कहलाता है यदि a के प्रत्येक प्रतिवेश में S का a के अलावा कम से कम एक बिन्दु विद्यमान हो।

(44) Define analytic function. विश्लेषिक फलन किसे कहते हैं?

Ans. A single value function $f(z)$ is said to be analytic at a if it is differentiable at every point of a neighborhood of a .

एकमानी फलन $f(z)$ एक बिन्दु a पर विश्लेषिक कहलाता है यदि $f(z)$, a की कम से कम एक प्रतिवेश के सभी बिन्दुओं पर अवकलनीय हों।

(45) Write sufficient condition for a conformed mapping representation.

अनुकोण प्रतिचित्रण के निरूपण के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए।

Ans. Let at each point z of a domain D , $f(z)$ is analytic and $f'(z) \neq 0$ then the mapping $w = f(z)$ is conformal.

माना z -समतल के प्रान्त D में $f(z)$ एक विश्लेषिक फलन हैं एवं $f'(z) \neq 0$ तब प्रतिचित्रण $w = f(z)$ प्रान्त के D प्रत्येक बिन्दु पर अनुकोण है।

(46) The image of a line parallel to x-axis under exponential transformation.

चरघातांकी रूपान्तरण के अन्तर्गत x -अक्ष के समान्तर सरल रेखा का प्रतिबिम्ब है।

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------|
| (i) Radius vector (अरीय सरल रेखा) | (ii) Circle (वृत्त) |
| (iii) Parabola (परवलय) | (iv) Hyperbola (अतिपरवलय) |

Ans. Radius vector (अरीय सरल रेखा)

(47) State Gauss mean value theorem. गॉस माध्यमान प्रमेय लिखिए।

Ans. If $f(z)$ is analytic in a domain D and circle $C: |z - a| = r$ contained in G then

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

(48) Define removable singularity.

अपनेय विचित्रता को परिभाषित कीजिए।

Ans. If a single valued function $f(z)$ is not defined at $z=a$ but $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ exist finitely then $z=a$ is called removable singularity of $f(z)$.

यदि एक मानी फलन $f(z)$ बिन्दु $z = a$ पर परिभाषित नहीं है, लेकिन $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ परिमित रूप से विद्यमान हो तो बिन्दु $z = a$ फलन $f(z)$ को अपनेय विचित्रता होती है।

(49) If AB is the arc $\alpha \leq \theta \leq \beta$ of the circle $|z - a| = r$ and $\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = k$ then value of $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{AB} f(z) dz$ is-

यदि AB वृत्त $|z - a| = r$ का चाप $\alpha \leq \theta \leq \beta$ है तथा $\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = k$ यदि तो $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{AB} f(z) dz$ का मान क्या होगा?

(50) If a power series $\sum anz^n$ is convergent at $z = z_0 \neq 0$ then at What value of z it is absolute convergent.

यदि घात श्रेणी $\sum anz^n$, $z = z_0 \neq 0$ पर अभिसारी है तो के किस मान के लिए यह निपरेच अभिसारी होगी।

Ans. $|z| < |z_0|$