Program Name B.Sc/B.A (Mathematics)
B.Sc./B.A. Part III
Paper Code – MT- 07 (Algebra)
Section – C
(Long Answer Questions दीर्घ ऊत्तर वाले प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न $14\frac{1}{2}$ अंक का है Each Question Carries $14\frac{1}{2}$ Marks

(1) If (+) and (.) are operations defined on set R where

a (+) b = a + b + 1

a (.) b = a + b + ab $\quad\forall \quad a, b \in R$

then prove that (R, (+), (.)) is commutative ring with unit element.

यदि (+) एवं (.) वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संक्रियाएं है जहां

a (+) b = a + b + 1

a (.) b = a + b + ab $\quad\forall \quad a, b \in R$

तब सिद्ध कीजिए कि (R, (+), (.)) एक इकाई अवयव सहित क्रम विनिमय वलय है।

(Ans. MT-07, p.164)

(2) Every prime field of characterstics zero is isomorphic to the field Q of rational numbers.

शून्य अभिलक्षण का प्रत्येक अभाज्य क्षेत्र परिमेय संख्याओं के क्षेत्र Q के तुल्यकारी होता है।

(Ans. MT-07, p. 237)

(3) A non void subset W of a vector space V (f) to be a subspace of V (f) if and only if

यदि V क्षेत्र f पर सदिश समष्टि हो औश्र w, v का अरिक्त उपसमुच्चय हो तो की w, v उपसमष्टि होगी यदि और केवल यदि

(i) $u, V \in W \implies u - v \in w$ and और

(ii) $a \in f, u \in w \implies a\,u \in w$

(Ans. MT-09, p. 288)

(4) If v (f) is a finite dimentional vector space and W is a subspace of V(f), dimension of quotient space is finite and

dim $\left(\frac{v}{w}\right) = \dim V - \dim W$

यदि v (f) एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है तथा W, V की एक उपसमष्टि है तो विभाग समष्टि V/W भी परिमित विमा का होता है तथा विमा V/W = विमा V - विमा W

(Ans. MT-07, P. 336)

(5) State and prove cayley's theorem

कैले–प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

(Ans. MT-07, p.119)

(6) Let V be a vector space over a field F. If) be the zero vector in V and) be the additive identity in F then.

यदि V क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि है तथा V का शून्य सदिश 0 है तथा F का योज्य तत्समक अवयव शून्य 0 है तब

(i) $a.0 = 0 \,\forall\, a \in F$

(ii) $a.v = 0 \,\forall\, v \in V, 0 \in F$

(iii) $(-a).v = a.(-v) = -(a.v) \quad \forall\, a \in F, v \in V$

(iv) $a.(u - v) = a.u - a.v \quad \forall\, a \in F,\ u, v \in V$

(v) $a.v = 0 = a = 0\ or\ v = 0\ where\ \ a \in F,\ \ v \in V$

(vi) $a.u = a.v = u = v \; if \; a \neq 0, \; a \in F, \; u, v \in V$

(vii) $a.u = b.u = a = b \; if \; a, b \in F, \; 0 = u \in V$

(Ans. MT-07, p. 285)

(7) State and prove fundamental theorem on Homomorphism.

समाकारिता की मूलभूत प्रमेय का कथन लिखकर सत्यापित कीजिए।

(Ans. MT-09, p. 149)

(8) If S and T are subsets of a vector space V 9f) then

यदि S और T सदिश समष्टि V 9F) के उपसमुच्चश् हों, तो

(i) S C L (D) = L(S) C L(T)

(ii) S C T = L(S) C L(T)

(iii) S, V उपसमष्टि है यदि और केवल यदि L (S) = S

S is a sub space V if and only if L (S) = S

(iv) (L (S)) = L (S)

(Ans. MT-07, P. 301)

Q.9 (i) If (यदि) $\sigma = (1 \quad 7 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 4)$,

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

then prove that (तो सिद्ध कीजिये कि)

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1) \quad \rho(7) \quad \rho(2) \quad \rho(6) \quad \rho(3) \quad \rho(5) \quad \rho(8) \quad \rho(14))$$

Ans. [MT-07, Page 59]

(ii) Find all the cosets of $5I$ in the group $(I,+)$ where is a set of integers.

समूह $(I,+)$ में $5I$ के सभी सहकुलक ज्ञात कीजिए, जहाँ I पूर्णांकों का समुच्चय है।

Ans. [MT-07, Page 89]

Q.10 (i) Show that the set Q^+ of the positive rational numbers forms an abelian group for the operation * defined as :

प्रदर्शित कीजिए कि धनात्मक परिमेय संख्याओं Q^+ संक्रिया * के लिये एक क्रम विनिमेय समूह है, जहाँ संक्रिया * निम्न प्रकार परिभाषित है।

$$a * b = \frac{ab}{2}, \; \forall \; a, b \in Q^+$$

Ans. [MT-07, Page 13]

(ii) Prove that the set of all ordered pairs of real numbers is a commutative ring with unity under addition $\oplus$ and multiplication $(.)$ of ordered pairs defined as:

प्रदिर्शत कीजिये कि यदि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R के अवयवों के क्रमित युग्मों के समुच्चय $S = \{(a,b); a, b \in R\}$ पर योग $\oplus$ तथा गुणन $(.)$ की संक्रियाएँ निम्न प्रकार परिभाषित है

(i) $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

(ii) $(a,b)(.)(c,d) = (ac, bd) \; \forall \; (a,b),(c,d) \in S$

तब $(S, \oplus, (.))$ इकाई अवयव सहित क्रम विनिमेय शून्य भाजक वलय है।

Ans. [MT-07, Page 169]

Q.11 (i) Every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.

प्रत्येक समूह G का समाकृतिक प्रतिबिम्ब G के किसी विभाग समूह के तुल्यकारी होता है।

Ans. [MT-07, Page 149]

(ii) Any two isomorphic integral domains have isomorphic quotient field.

किन्ही दो तुल्यकारी पूर्णांकीय प्रान्तों के विभाग क्षेत्र भी तुल्यकारी होते हैं।

Ans. [MT-07, Page 233]

Q.12 (i) A commutative ring without zero divisors can be embedded into a field.

किसी भी शून्यभाजक रहित, क्रमविनिमेय वलय का एक क्षेत्र में अन्त:स्थापन किया जा सकता है।

Ans. [MT-07, Page 214]

(ii) Write the definition of centre of group and prove that for any group G its centre Z is normal subgroup of G.

समूह के केन्द्र की परिभाषा लिखिए तथा सिद्ध कीजिए कि समूह G का केन्द्र Z, G का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Ans. [MT-07, Page 128]

Q.13 Let R be the set of integers with operations $\oplus$ and $(\bullet)$, where $a \oplus b = a + b + 1$and $a(\bullet)b = a + b + ab \ \forall a, b \in R$. Then prove that $(R, \oplus, (\bullet))$ is a ring with identity.

यदि $\oplus$ एवं $(\bullet)$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संक्रियाए है जहाँ $a \oplus b = a + b + 1$ तथा $a(\bullet)b = a + b + ab \ \forall a, b \in R$ तब सिद्ध कीजिए कि $(R, \oplus, (\bullet))$ एक इकाई अवयव सहित क्रम विनिमेय वलय है।

Ans. [MT-07, P.No. 164]

Q.14 Prove that a ring without identity can be embedded in a ring with identity.

सिद्ध कीजिए कि इकाई अवयव रहित वलय को किसी इकाई अवयव सहित वलय में अत: स्थापित किया जा सकता है।

Ans. [MT-07, P.No. 211]

Q.15 Let V(F) be a vector space and $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ be a set of non zero vectors of V. Then prove that S is linearly dependent if and only if there is a vector $v_m \in S$. Which can be expressed as linear combination of previous vector of S where $2 \le m \le n$.

किसी सदिश समष्टि V(F) में अशून्य सदिशों का समुच्चय $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ है। तब सिद्ध कीजिए कि S एकघातत: अभित होगा यदि और केवल यदि जब कोई सदिश $v_m \in S$ अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एकघात संचय हो, जहाँ $2 \le m \le n$

Ans. [MT-07, P.No. 306]

Q.16 State and prove Cayley's theorem.

कैले प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

Ans. [MT-07, P.No. 119]

Q.17 Prove that the set $I_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ for operation T_n (addition modulo n) and X_n multiplication modulo n is a commutative ring.

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय $I_n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ संक्रियाओं T_n (योग प्रमाप n) तथा X_n (गुणन प्रमाप n) के सापेक्ष एक क्रम विनिमेय वलय है।

Ans. [MT-07, P.No. 171]

Q.18 Prove that every integral domain can be embedded in a field.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पूर्णांकीय प्रांत को एक क्षेत्र में अत: स्थापित किया जा सकता है।

Ans. [MT-07, P.No. 214]

Q.19 Let $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ be a basis of vector space V(F) and $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_jv_j + \dots + a_nv_n$ is a non zero vector where. Then prove that the set $S=\{v_1, v_2, \dots v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ is also basis of V(F).

यदि समुच्चय $S=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ सदिश समष्टि V(F) का आधार हो और $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_jv_j + \dots + a_nv_n$ एक अशून्य सदिश हो जहाँ $a_j \neq 0$ तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S=\{v_1, v_2, \dots v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ V(F) का आधार है।

Ans. [MT-07, P.No. 320]

Q.20 Prove that the set of all even permutation An $(n \geq 2)$ is a group for permutation multiplication of order $\frac{n!}{2}$.

सिद्ध कीजिए कि n कोटि अंशाक के सभी समक्रमचयों का समुच्चय An $(n \geq 2)$ क्रमचय गुणन संक्रिया के लिए $\frac{n!}{2}$ कोटि का समूह होता है।

Ans. [MT-07, P.No. 53]

प्र.21 प्रदर्शित कीजिए कि (Show that the set of all matrices of the type)

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$$

आकार की सभी आव्यूह का समुच्चय, आव्यूह गुणन के लिये क्रमविनिमेय समूह है।

(is commutative group for the matrix multiplication.)

उत्तर P.N. 15

प्र.22 सिद्ध कीजिए कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि उसके जनक की कोटि के बराबर होती है।

(Prove that the order of a finite cyclic group is equal to the order of its generator.)

उत्तर P.No. 76, प्रमेय - 3

प्र.23 कैले–प्रमेय का कथन कीजिए तथा इसे सिद्ध कीजिए।

(State Cayley-theorem and prove it.)

उत्तर P.No. 119

प्र.24 पूर्णांकीय प्रान्त $(D, t, .)$ का भागफल क्षेत्र, D को अन्तर्विष्ट करने वाला लघुत्तम क्षेत्र F होता है।

(Prove that quotient field of Integral domain $(D, t, .)$ is the smallest field F containing D.)

उत्तर P.No. 220

Q.25 यदि V फील्ड F पर एक सदिश समष्टि है। तथा V का शून्य सदिश 0 है। तथा F का योज्य तत्समक अवयव शून्य 0 है। तब ज्ञात कीजिए।

If V be a vector space over the Field F and 0 be the zero vector of V and zero 0 be the additive identity in F. Then find

(i) $a.0 = 0$, $\forall a \in F$

(ii) $0.v = 0$, $\forall v \in V$, $0 \in F$

(iii) $(-a).v = a.(-v) = -(a.v)\ \forall a \in F,\ u \in V$

(iv) $a.(u-v) = a.u - a.v\ ,\ \forall a \in F,\ v \in F$

(v) $a.v = 0 \Rightarrow a = 0$ या $v = 0$ जहाँ $a \in F,\ u \in V$

(vi) $a.u = a.v \Rightarrow a = b$ यदि $a \neq 0,\ a \in F$ तथा $u, v \in V$

(vii) $a.u = a.v \Rightarrow u = v$ यदि $a, b \in F$ तथा $0 \neq u \in V$

Ans. [MT-07, P.No. 285]

Q.26 Prove that every group is isomorphic to same permutation group.
सिद्ध कीजिये प्रत्येक समूह एक क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है।

Ans. [MT-07, P.No. 119]

Q.27 (a) Prove that every infinite cyclic group has two and only two generators.
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।

Ans. [MT-07, P.No. 77]

(b) An non empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if
किसी ग्रुप G का एक अरिक्त उपसमुच्चय H उसका उपग्रुप होगा यदि और केवल यदि

(i) $a \in H,\ b \in H \Rightarrow ab \in H$

(ii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

Ans. [MT-07, P.No. 30]

Q.28 Prove that every ring can be embedded in a ring with unity
सिद्ध कीजिये प्रत्येक वलय का एक तत्समकी वलय में अन्तस्थापन किया जा सकता है।

Ans. [MT-07, P. No. 214]