Program Name B.Sc/B.A (Mathematics)
B.Sc./B.A. Part III
Paper Code – MT- 07 (Algebra)
Section – B
(Short Answer Questions लघु ऊत्तर वाले प्रश्न)
प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है Each Question Carries 6 Marks

(1) Show that $G = \{0,1,2,3,4\}$ is an obelian group.
प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय $G = \{0,1,2,3,4\}$संक्रिया के लिए क्रमविनिमय समूह है।

(Ans. MT-07, P.10)

(2) Write f as product of disjoint cycles where $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$ Also find order of f.
यदि $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 1 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$ हो तो को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखिए तथा की कोटि भी ज्ञात कीजिए।

(Ans. MT-09, P.51)

(3) Any subgroup H of a group is normal if and only if

किसी समूह G का एक उपसमूह H प्रसामान्य होता है यदि और केवल यदि

$x\,H\,x^{-1} = H \;\forall\, x \in G$

(Ans. MT-07, P.125)

(4) Prove that intersection of any two subrings of a ring R is again a subring of R.

सिद्ध कीजिए कि वलय R के किन्हीं भी दो उपवलयों का सर्वनिष्ट भी R का एक उपवलय होता है।
(Ans. MT-07, P.181)

(5) The factor group of abelian group is abelian but converse is not true.

किसी आबेली समूह का विभाग समूह आबेली होता परन्तु विलोम अनिवार्यत: सत्य नहीं है।
(Ans. MT-07, P.145)

(6) Of isomorphism $\cong$ in the set of al groups is and equivalence relation.

समूहों के समुच्चय में तुल्यकारिता का संबध $\cong$ एक तुन्याता संबध है।
(Ans. MT-07, P.117)

(7) Every field is a simple ring or A field has no proper ideals.

प्रत्येक क्षेत्र सरल वलय होता है अर्थात् क्षेत्र की कोई भी उचित गुणजावली नहीं होती है।
(Ans. MT-07, P.251)

(8) Any two basis of a finite dimensional vector space have the same number of elements.

परिमित विमीय सदिश समष्टि V (f) के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है।

(Ans. MT-07, P.)

(9) Show that $G = \{1,2,3,4, x_5\}$ is an obelian group.

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय $G = \{1,2,3,4\}$ संक्रिया x_5 के लिए क्रमविनिमय समूह है।

(Ans. MT-07, P.1

(10) Write f as product of disjoint cycles where $f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 2\,5\,4\,6\,3\,1\,9\,7\,8 \end{pmatrix} \in S_9$ Also find order of f.

यदि $f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 2\,5\,4\,6\,3\,1\,9\,7\,8 \end{pmatrix} \in S_9$ हो तो को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखिए तथा की कोटि भी ज्ञात कीजिए।

(Ans. MT-09, P.51)

(11) If H Δ G and K Δ G then Prove that HK Δ G

यदि H Δ G एवं K Δ G तब सिद्ध कीजिए कि HK Δ G

(Ans. MT-07, P.136)

(12) The characterstics of an integral domain is either zero or a prime number.

पूर्णांकिय प्रांत (D, +, .) का अभिलक्षण शून्य अथवा अभाज्य संख्या होती है।

(Ans. MT-07, P.189)

(13) A comitative ring with unity is a field if it is simple.

इकाई सहित क्रमविनिमय वलय R क्षेत्र होता है यदि और केवल यदि R सरल वलय हो।

(Ans. MT-07, P.250)

(14) If f is homomorphism from a group G to G^1 and if e and e^1 be their respective identities then

यदि $f : G \rightarrow G^1$ समूह (G, *) से समूह $(G^1, *^1)$ में समकारिता हो एवं e और e^1 क्रमश: समूह G एवं G^1 के तत्समक अवयव हैं तो सिद्ध कीजिए।

(i) $f(e) = e^1$

(ii) $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1} \quad \forall a \in G$

(Ans. MT-07, P.113)

(15) Is without zero divisor.

प्रत्येक क्षेत्र शून्य भाजक रहित होता है।

(Ans. MT-07, P.191)

(16) Every ring can be embedded in a ring with unity.

इकई अवयव रहित वलय को किसी इकाई अवयव सहित वलय में अत: स्थापित किया जा सकता है।

(Ans. MT-07, P.211)

Q.17 Let $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ be two permutations then find fog and gof.

माना $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 5 संकेतों पर दो क्रमचय है, तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-07, Page 56]

Q.18 The order of every subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.
किसी परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि की भाजक होती है।
Ans. [MT-07, Page 94]

Q.19 A ring R is without zero divisor iff the cancellation law holds in R.
सिद्ध कीजिये कि वलय $(R,+,.)$ एक शून्य भाजक रहित वलय होती है यदि और केवल यदि R में निरसन नियम लागू होता है।

Ans. [MT-07, Page 174]

Q.20 A non void subset H of a group G is a subgroup if and only if

$$a \in H,\ b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H \text{ Where } b^{-1} \text{ is an identify element of } b \text{ in } G.$$

किसी समूह G का कोई अरिक्त उपसमुच्चय H, एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि

$$a \in H,\ b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H \text{ जहाँ } b^{-1} \text{ समूह } G \text{ में } H \text{ का प्रतिलोम है।}$$

Ans. [MT-07, Page 25]

Q.21 If the order of an element a of group G is n, then show that the order of a^p is also n provided p and n are relatively prime.
यदि किसी समूह G के अवयव a की कोटि n है तो सिद्ध कीजिए कि a^p की कोटि भी n होगी, यदि p तथा n सापेक्षित अभाज्य है।

Ans. [MT-07, Page 69]

Q.22 The set of all cosets $\frac{G}{N}$ of a normal subgroup N in a group G is a group with respect to multiplication.
यदि किसी समूह G के एक प्रसामान्य उपसमूह N के सभी सहसमुच्चयों का समुच्चय $\frac{G}{N}$, सहसमुच्चय के गुणन के सापेक्ष एक समूह होता है।

Ans. [MT-07, Page 142]

Q.23 Every field is an integral domain.
प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

Ans. [MT-07, Page 191]

Q.24 Show that the following set V of matrices is vector space over the field R of real numbers with respect to matrix addition and matrix scalar multiplication where:
सिद्ध कीजिए कि निम्न मैट्रिक्स समुच्चय, मैट्रिक्स योग एवं मैट्रिक्स अदिश गुणन के सापेक्ष वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर एक अदिश समष्टि है।

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$$

Ans. [MT-07, Page 281]

Q.25 Prove that the set $G = \{1, 2, 3, 4\}$ is an abelian group for multiplication module X_5 operation.
सिद्ध करो कि समुच्चय $G = \{1, 2, 3, 4\}$ संक्रिया X_5 (माडयूलो गुणा 5) के लिए एक आबेली समूह होता है।

Ans. [MT-07, P.No. 11]

Q.26 Prove that ordered a cycle of length m in permutation group is m.
सिद्ध कीजिए कि क्रमचय समूह में m लम्बाई के चक्र की कोटि m होती है।

Ans. [MT-07, P.No. 47]

Q.27 Prove that order of finite cyclic group equals to order of its generator.
सिद्ध कीजिए कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि उसके जनक की कोटि के बराबर होती है?

Ans. [MT-07, P.No. 76]

Q.28 If H is a subgroup of a group G and $K = \{x \in G \mid xH = H_x\}$ then prove that K is a subgroup of G.

यदि H समूह G का उपसमूह है तथा $K = \{x \in G \mid xH = H_x\}$ तो सिद्ध कीजिए कि K, G का उपसमूह है।

Ans. [MT-07, P.No. 101]

Q.29 Prove that intersection of any two normal subgroup of a group G is also a normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी उस समूह G का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Ans. [MT-07, P.No. 129]

Q.30 Prove that a finite commutative ring without zero divisors is a field?

सिद्ध कीजिए कि शून्य भाजक रहित परिमित क्रम विनिमेय वलय एक क्षेत्र होता है?

Q.31 Prove that for a prime number p the field (Z_p, T_p, X_p) is a prime field?

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभाज्य संख्या p के लिए क्षेत्र (Z_p, T_p, X_p) अभाज्य क्षेत्र होता है?

Ans. [MT07, P.No. 236]

Q.32 Let w_1 and w_2 are subspace of a vector space V(F). Then prove that $w_1 \cup w_2$ is a subspace if and only if $w_1 \subset w_2$ or $w_2 \subset w_1$.

किसी सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ w_1 तथा w_2 है। तब सिद्ध कीजिए कि $w_1 \cup w_2$ उपसमष्टि होगी यदि और केवल यदि $w_1 \subset w_2$ या $w_2 \subset w_1$

Ans. [MT-07, P.No. 291]

Q.33 Prove that the set where

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

is an abelian group fro matrix multiplication.

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

आव्यूह गुणन संक्रिया के लिए एक आबेली समूह होता है।

Ans. [MT-07, P.No. 12]

Q.34 If $\sigma = (1 \quad 7 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 4)$ and $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ then prove that :

यदि $\sigma = (1 \quad 7 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 4)$ तथा $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 6 & 3 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि :

Ans. [MT-07, P.No. 12]

Q.35 If $a, b \in G$ arbitrary element of G. Then prove that $0(b^{-1}ab) = 0(b)$.

यदि a तथा b समूह G के कोई दो स्वेच्छ अवयव हो तो सिद्ध कीजिए कि $0(b^{-1}ab) = 0(b)$

Ans. [MT-07, P.No. 68]

Q.36 If f is a homomorphism from group $(G, *)$ to group $(G', *')$. Then prove that is monomorphism if and only if Kernel $K = \{e\}$, where e is identity element of.

यदि f समूह $(G, *)$ से समूह $(G', *')$ में समाकारिता है। तो सिद्ध कीजिए कि f एक एकैकी समाकारिता होगी यदि और केवल यदि f की अष्टि $K = \{e\}$ जहाँ e, G का तत्समक अवयव है।

Ans. [MT-07, P.No. 116]

Q.37 Let H be the only subgroup of order n of a finite subgroup G. Then prove that H is normal subgroup of G.

माना कि परिमित समूह G का केवल H ही n कोटि का उपसमूह है। तब सिद्ध कीजिए कि H, G का प्रसामान्य उपसमूह होगा।

Ans. [MT-07, P.No. 135]

Q.38 Prove that the intersection of any two subring of a ring R is also a subring of R.

सिद्ध कीजिए कि वलय R के किन्हीं भी दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी R का एक उपवलय होता है।

Ans. [MT-07, P.No. 181]

Q.39 Prove that the homomorphic image of a ring without zero division is also a ring without zero divisors?

सिद्ध कीजिए कि शून्य भाजक रहित वलय का तुल्यकारी प्रतिबिम्ब भी एक शून्य भाजक रहित वलय होता है?

Ans. [MT07, P.No. 208]

Q.40 Let V(F) be a vector space and $v \in V$ is a linear combination of vectors $v_1, v_2, ..., v_n \in V$. Then prove that the set $\{v, v_1, v_2, ..., v_n\}$ is linearly dependent.

माना V(F) एक सदिश समष्टि है। यदि $v \in V$ सदिशों $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ का एक घात संचय हो तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{v, v_1, v_2, ..., v_n\}$ एक घातत: परतन्त्र होता है।

Ans. [MT-07, P.No. 305]

प्र.41 प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ संक्रिया t_5 के लिये एक क्रमविनिमेय समूह है।

(Show that the set $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ is group for the operation t_5)

उत्तर MT-07, P.N. 10, उदाहरण 4

प्र.42 यदि $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in R, ad - bc \neq 0 \right\}$ आव्यूह गुणन के लिये एक समूह हो तो, सिद्ध कीजिए कि $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \in G, ad \neq 0 \right\}$ G का एक उपसमूह है।

(If $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in R, ad - bc \neq 0 \right\}$ is group for matrix multiplication, show that $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \in G, ad \neq 0 \right\}$ is subgroup of G.)

उत्तर MT-07, P.N. 31, उदाहरण 3

प्र.43 यदि $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$ तो f को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखिए तथा f की कोटि भी ज्ञात कीजिए।

(If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 3 & 1 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$ then write the permutation f as the product of disjoint cycles and find the order of f.)

उत्तर P.No. 51, उदाहरण (i)

प्र.44 सिद्ध करो कि समूह $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ x_7$ एक चक्रीय समूह है। इसके सभी जनक ज्ञात कीजिए।

(Prove that $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ x_7$ is cyclic group. Find its all generations)

उत्तर P.N. 80, उदाहरण–2

प्र.45 गुणन संक्रिया वाले समूह $G=\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$ का क्रमचय समूह ज्ञात कीजिये जो G के साथ तुल्यकारी है।

(Find the permutation group of the group $G=\{1,\ i,\ -1,\ -i\}$ with multiplication operation, which is isomorphic with G.)

उत्तर P.N. 120

प्र.46 यदि $(R,t,.)$ एक वलय है तब $\forall a,b,c\in R$ सिद्ध कीजिये

(If $(R,t,.)$ is ring $\forall a,b,c\in R$, show that)

(i) $a.0=0=0.a$ (ii) $a.(-b)=-(a.b)=(-a).b$

उत्तर P.No. 172, प्रमेय 1 (i), (ii)

प्र.47 परिमित पूर्णांकीय प्रान्त सदैव एक क्षेत्र होता है। सिद्ध कीजिए।

(Every finite integral domain is a field. Prove this.)

उत्तर P.No. 193 प्रमेय - 7

प्र.48 यदि $I_1=2z$, $I_2=4z$ वलय (z,t,x) की गुणजावलियाँ है, सिद्ध कीजिये कि $I_1\wedge I_2$ भी (z,t,x) की गुणजावली है।

(If $I_1=2z$, $I_2=4z$ are ideals of the ring (z,t,x), then show that $I_1\wedge I_2$ is ideal of (z,t,x))

उत्तर P.No. 247

Q.49 Show that the set Q^+ of positive rational numbers forms an abelian group for the operation $*$ defined as

$$a*b=\frac{ab}{2},\ \forall a,b\in Q^+$$

प्रदर्शित कीजिये कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ संक्रिया $*$ के लिये एक आबेली समूह होता है। जहाँ $*$ निम्न प्रकार परिभाषित है।

$$a*b=\frac{ab}{2},\forall a,b\in Q^+$$

Ans. [MT-07, P.No. 13]

Q.50 यदि $\sigma=(1\ \ 7\ \ 2\ \ 6\ \ 3\ \ 5\ \ 8\ \ 4)$

$$\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&5&4&3&8&7&6&1\end{pmatrix}$$

तो सिद्ध कीजिए कि

$$\rho\sigma\rho^{-1}=(\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

If $\sigma=(1\ \ 7\ \ 2\ \ 6\ \ 3\ \ 5\ \ 8\ \ 4)$

$$\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&5&4&3&8&7&6&1\end{pmatrix}$$

Then prove that

$$\rho\sigma\rho^{-1}=(\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

Ans. [MT-07, P.No. 59]

Q.51 State and prove Lagrange's theorem for groups.

समूहों के लिये लेग्रेज प्रमेय का प्रकथन देकर सिद्ध कीजिए।

Ans. [MT-07, P.No. 94]

Q.52 If H and K be subgroups of finite index in a group G and suppose HCK. prove that

$$[G:H]=[G:K].[K:H]$$

यदि H तथा K ग्रुप G के परिमित सूचकांक वाले उपग्रुप है। तथा HCK है तो सिद्ध कीजिए

$$[G:H]=[G:K].[K:H]$$

Ans. [MT-07, P.No. 104]

Q.53 Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

सिद्ध कीजिये कि किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ उस समूह का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

Ans. [MT-07, P.No. 129]

Q.54 If e and e' be the identities of groups G and G' respectively and f be homomophism from G to G'. Show that

(i) $f(e)=e'$

(ii) $f(a^{-1})=[f(a)]^{-1}, \ \forall a \in G$

(iii) $f(a^n)=[f(a)]^n, \ \forall a \in G, \ n \in Z$

यदि e और e' ग्रुप G व ग्रुप G' के क्रमशः तत्समक अवयव है। तथा f, G से G' में समाकारिता हो तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $f(e)=e'$

(ii) $f(a^{-1})=[f(a)]^{-1}, \ \forall a \in G$

(iii) $f(a^n)=[f(a)]^n, \ \forall a \in G$ एवं $n \in Z$ के लिये

Ans. [MT-07, P.No. 113]

Q.55 Prove that every finite integral domain is a field.

प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है। सिद्ध कीजिये।

Ans. [MT07, P.No. 193]

Q.56 Prove that a field has no proper ideals.

सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र की उचित गुणजावलिया नहीं होती है।

Ans. [MT-07, P.No. 248]