

Program Name B.Sc./B.A. (Mathematics)

B.Sc. /B.A. - Part III

Paper Code – MT- 07 (Algebra)

Section – A

(Very Short Answer Questions अति लघु उत्तर वाले प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है Each Question Carries 2 Marks

- (1) Give an example of an abelian group of order 2.

दो कोटि के क्रमविनिमेय (आबेली) समूह का उदाहरण दीजिए।

Ans. $G = \{1, -1, .\}$

- (2) Find the order of (-1) in group $G = \{1, -1, i, -i, .\}$

समूह $G = \{1, -1, i, -i, .\}$ में -1 तत्समक अवयव है।

Ans. $0(-1) = 2$

- (3) Group $G = \{1, -1, i, -i, .\}$ is a cyclic group write its generators.

समूह $G = \{1, -1, i, -i, .\}$ एक चक्रीय समूह है इसके जनक बतइए।

Ans. $i, -i$

- (4) Every subgroup of a group is a normal subgroup then that group is known-

यदि समूह का प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह हो तो उस समूह को कहते हैं—

Ans. Hamiltonian group (हैमिल्टनी समूह)

- (5) Give two examples of commutates ring.

क्रमविनिमय वलय के दो उदाहरण दीजिए।

Ans. $(x, +, .) (R, +, .)$

- (6) If $S = \{(1, 0, 0)\} CV_3(R)$ then $L(S)$?

यदि $S = \{(1, 0, 0)\} CV_3(R)$ तो $L(S)$?

Ans. $L(S) = \{(9, 0, 0) a \in R\}$

- (7) Give two examples of subspace of vector space $V_3(R)$

सदिश समष्टि $V_3(R)$ के उपसमष्टि के दो उदाहरण दो।

Ans. $W_1 = \{(x, 2y, 3z) \mid x, y, z \in R\}$

$W_2 = \{(x, x, x) \mid x \in R\}$

(8) Give an example of an abelian group of order 3.

तीन कोटि के क्रमविनिमेय (आबेली) समूह का उदाहरण दीजिए।

Ans. $G = \{1, w, w^2, .\}$

(9) Group $G = \{1, w, w^2, .\}$, $o(w) = ?$

समूह $G = \{1, w, w^2, .\}$, $o(w) = ?$

Ans. $o(w) = 3$

(10) Group $G = \{1, w, w^2, .\}$ is a cyclic group write its generators.

समूह $G = \{1, w, w^2, .\}$ एक चक्रीय समूह है इसके जनक बताइए।

Ans. $1, w, w^2$

(11) If N is a normal subgroup of a finite group G then $O\left(\frac{G}{N}\right)$ is :

यदि N एक परिमित समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है तो $O\left(\frac{G}{N}\right)$ होगा।

Ans. $O\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{O(G)}{O(N)}$

(12) Give an example of subring of two different rings.

किन्हीं दो वलयों के लिए उपवलय बताइए।

Ans. (i) $(Q, +, .)$ is a subring of ring $(R, +, .)$

(ii) $(Z, +, .)$ is a subring of ring $(Q, +, .)$

$(Q, +, .)$ वलय $(R, +, .)$ तथा $(Z, +, .)$ वलय $(Q, +, .)$ का उपवलय है।

(13) Characteristics of an integral domain $(D, +, .)$ is either or

पूर्णाकीय प्रांत $(D, +, .)$ का अभिलक्षण अथवा होती है।

Ans. Zero or prime number

शून्य अथवा अभाज्य संख्या

(14) Every ring R have always two ideals, write.

प्रत्येक वलय R की दो गणजवली सर्वदा विद्यमान होती हैं, बताइए।

Ans. Ring R itself and zero ideal $\{0\}$.

वलय R स्वयं तथा शून्य गुणजावली $\{0\}$.

Q.15 What is the identify element of addition composition?

योग की द्विआधारी संक्रिया के लिए तत्समक अवयव लिखिए।

Ans. शून्य (0)

Q.16 What is the order of the following group $G = [\{0, 1, 2, 3\}, +]$

निम्न $G = [\{0, 1, 2, 3\}, +]$ समूह की कोटि लिखिए।

Ans. $o(G) = 4$

Q.17 How many permutations of the set $s = \{1, 2, 3\}$.

दिये गये समुच्चय $s = \{1, 2, 3\}$ के कितने क्रमचय बनेंगे?

Ans. अवयवों की संख्या (Number of element) $n = 3$ अतः

क्रमचय (Permutation) $= 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Q.18 What is the order of ω^2 in the group $[\{1, \omega, \omega^2\}, x]$.

दिए गए ग्रुप $\langle \{1, \omega, \omega^2\}, x \rangle$ में ω^2 की कोटि लिखिए।

Ans. $O(\omega^2) = 3$

Q.19 Union of all the cosets of any group G is equal to.
किसी भी समूह के सभी सहसमुच्चयों का संघ किसके बराबर होता है।

Ans. ग्रुप (समूह) Group

Q.20 A ring (z_n, t_n, x_n) where $z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ is an integral domain iff. n is
वलय (z_n, t_n, x_n) जहाँ $z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ एक पूर्णाकीय प्रान्त है यदि और केवल यदि n है।

Ans. एक अभाज्य संख्या (Prime number)

Q.21 What is $(R, +)$ a Ring.

वलय $(R, +)$ में क्या है?

Ans. एक आबेली समूह (an abelian group)

Q.22 Is group $\langle \{0, 1, 2\}, t_3 \rangle$ a subgroup of group $\langle \{0, 1, 2, 3\}, t_4 \rangle$?

क्या समूह $\langle \{0, 1, 2\}, t_3 \rangle$ समूह $\langle \{0, 1, 2, 3\}, t_4 \rangle$ का उपसमूह होता है?

Ans. No (नहीं)

Q.23 If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Then write value of fog .

यदि $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ तब fog का मान लिखिए।

Ans. $fog = (2 \ 3)$ or $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Q.24 Is a group G of order 7 commutative?

क्या कोई 7 कोटि का समूह G क्रमविनिमेय होता है?

Ans. Yes (हाँ)

Q.25 What is the order of G/K where G is a finite group and K is a normal subgroup of G ?

यदि G एक परिमित समूह है तथा K, G का प्रसामान्य उपसमूह है तो G/K की कोटि कितनी होगी?

Ans. $O(G)/O(K)$

Q.26 Is every field without zero divisors?

क्या प्रत्येक क्षेत्र शून्य भाजक रहित होता है?

Ans. Yes (हाँ)

Q.27 Is the set $S = \{1, i\}$ linearly independent in vector space $C(R)$?

क्या समुच्चय $S = \{1, i\}$ सदिश समष्टि $C(R)$ में एक घातत स्वतंत्र है?

Ans. Yes (हाँ)

Q.28 Is the number of elements in two basis same for a finite dimensional vector space?

क्या किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि के दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है?

Q.29 Is the set of all odd integers a group for addition operation?

क्या समस्त विषम पूर्णाकों का समुच्चय यौगिक संक्रिया के लिए समूह होता है?

Ans. No (नहीं)

Q.30 What is the order of identity element in a group?

किसी समूह में तत्समक अवयव की कोटि कितनी होती है?

Ans. 1

Q.31 What is the Kernel of homomorphism $f : G \rightarrow G$, where $f(x) = e$ (identity element) $\forall x \in G$?

समाकारिता $f : G \rightarrow G$ जहाँ $f(x) = e$ (तत्समक अवयव) $\forall x \in G$ की अष्टि का मान कितना होता है?

Ans. G

Q.32 Is every group G has atleast two normal subgroup?

क्या प्रत्येक समूह G के कम से कम दो प्रसामान्य उपसमूह होते हैं?

Ans. Yes (हाँ)

Q.33 What is name of one-one onto homomorphism?

एकैकी आच्छादक समाकारिता क्या कहलाती है?

Ans. Isomorphism (तुल्यकारिता)

Q.34 Is $(Z, T, .)$ an ideal of $(Q, T, .)$?

क्या $(Z, T, .)$, $(Q, T, .)$ की गुणजावली है?

Ans. No (नहीं)

Q.35 Is basis of a vector space linearly dependent?

क्या सदिश समष्टि का आधार एकघातत परतन्त्र है?

Ans. No (नहीं)

प्र.36 समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$ जहाँ $i = \sqrt{-1}$ में गुणन संक्रिया के लिये i का प्रतिलोम अवयव क्या है?

(What is the inverse element of i in the group $G = \{1, -1, i, -i\}$, where $i = \sqrt{-1}$ for the multiplication operator)

उत्तर $-i$

प्र.37 बताइये कि चार कोटि का प्रत्येक समूह क्रमविनिमेय होता है या नहीं?

(Is the every group of order 4 is commutative?)

उत्तर हाँ (yes)

प्र.38 यदि $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 5 संकेतों पर दो क्रमचय है तो fog का मान क्या होगा?

(If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ are two permutations on the five numbers, find the value of fog)

उत्तर $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ या (or) $(1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 4)$

प्र.39 समूह $G = (z_8, t_8)$ में $H = \{0, 4\}$ के विभिन्न वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों की संख्या क्या होगी?

(What is the number of left (right) cosets of $H = \{0, 4\}$ in $G = (z_8, t_8)$)

उत्तर 4

प्र.40 यदि N एक परिमित समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है तो का $O(G/N)$ मान क्या होगा?

(If N is normal subgroup of a finite group G , then find $O(G/N)$)

उत्तर $O(G/N) = \frac{O(G)}{O(N)}$

प्र.41 एक क्रमविनिमेय वलय का उदाहरण दीजिये

(Give an example of commutative ring)

उत्तर $(z, t, .)$ या $(R, t, .)$ या $(Q, t, .)$

प्र.42 क्षेत्र (z_7, t_7, x_7) , जहाँ $z_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ का अभिलक्षण बताइये

(What is the characteristic of a field (z_7, t_7, x_7) and $z_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$)

उत्तर 7

Q.43 Define Binary operation.
(द्विआधारी संक्रिया को परिभाषित कीजिये)

Ans. माना G एक अरिक्त समुच्चय हो तो

$$G \times G = \{(a, b); a \in G, b \in G\}$$

यदि $*$: $G \times G$ एक प्रतिचित्रण है तो $*$ समुच्चय G में एक द्विआधारी संक्रिया कहलाती है।

Q.44 Define permutation group.
क्रमचय समूह को परिभाषित कीजिए।

Ans. एक परिमित समुच्चय के स्वयं पर ही एक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण (one-one on to Mapping) को क्रमचय कहते हैं।

Q.45 Define cyclic group.
चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिये।

Ans. A group G is called cyclic if, for some $a \in G$, every element $x \in G$ is of the form a^n , where n is some integer. The element a is then called a generator of G .
एक ग्रुप G चक्रीय ग्रुप कहलाता है। यदि इसमें एक अवयव a ऐसा विद्यमान हो कि G का प्रत्येक अवयव a की पूर्णांक घात के रूप में व्यक्त किया जा सके।

Q.46 State Cayley's theorem for a group.
समूह के लिये कैली प्रमेय का कथन दीजिए।

Ans. Every finite group is isomorphic to some Permutation group.
प्रत्येक परिमित ग्रुप किसी क्रमचय ग्रुप के तुल्यकारिक होता है।

Q.47 Define normal subgroup of a group.
किसी समूह के प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए।

Ans. किसी समूह G का कोई उपसमूह N , G का उपसमूह कहलाता है। यदि प्रत्येक $g \in G$ तथा $x \in N$ के लिये $g x g^{-1} \in N$ यदि N , G का प्रसामान्य उपसमूह है। तब हम इसे संकेत $N \triangleleft G$ से व्यक्त करते हैं।

Q.48 Write the index of a subgroup?
उपसमूह का सूचकांक बताइये?

Ans. $[G : H] = \frac{O(G)}{O(H)}$

Q.49 Define a Vector space.
सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिये?

Ans. एक बीजीय पद्धति (V, \oplus) , जहाँ \oplus अरिक्त समुच्चय V में आन्तरिक संक्रिया है। फिल्ड $(F, +, \cdot)$ पर सदिश समष्टि या रैखिक समष्टि कहलाती है। यदि

(i) (V, \oplus) एक आबेली ग्रुप है।

(ii) अदिश गुणन के लिये बंटनता

$$\alpha_1(\bullet)(V_1 \oplus V_2) = (\alpha_1(\bullet)V_1) \oplus (\alpha_1(\bullet)V_2)$$

(iii) अदिश योग पर बंटनता

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\bullet) = (\alpha_1(\bullet)V_1) \oplus (\alpha_2(\bullet)V_1)$$

(iv) अदिश गुणा के लिये साध्यर्यता

$$\alpha_1(\bullet)(\alpha_2(\bullet)V_1) = (\alpha_1 \cdot \alpha_2)(\bullet)V_1$$

(v) $1(\bullet)V_1 = V_1$ यहाँ अवयव 1 संक्रिया \bullet के अन्तर्गत F का तत्समक अवयव है।

प्र.50 क्या चार कोटि का प्रत्येक समूह क्रमविनिमेय होता है?
(Is the every group of order 4 is commutative?)
उत्तर हाँ (yes)

VMOU