Program Name B.Sc./B.A. (Mathematics)
B.Sc. /B.A. - Part II
Paper Code – MT- 06
(Numerical Analysis & Vector Calcuius)
Section – C
(Long Answer Questions दीर्घ ऊत्तर वाले प्रश्न)
प्रत्येक प्रश्न 14½ अंक का है Each Question Carries 14½ Marks

Q.1 सतह $x^2+y^2+3z^2=3$ और $2x+3y+4z=5$ के बिन्दु $(1, 1, 0)$ पर स्पर्श रेखा और अभिलम्ब समतल के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the tangent and normal surface at point $(1, 1, 0)$ of surface $x^2+y^2+3z^2=3$ and $2x+3y+4z=5$.

Ans. [MT-06, P.No. 352]

Q.2 समतलों $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर फलन $\vec{F}=(2x-z)\hat{i}+x^2y\,\hat{j}-xz^2\hat{k}$ के लिए गॉस अपसरण प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify Gauss divergence theorem for $\vec{F}=(2x-z)\hat{i}+x^2y\,\hat{j}-xz^2\hat{k}$ taken over the region bounded by the planes $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

Ans. [MT-06, Page 387]

Q.3 अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=x+y$ जहाँ $y(0)=1$ को आयलर की परिवर्तित विधि द्वारा हल करते हुए $x=0.05$ तथा $x=0.1$ के लिए y ज्ञात कीजिए।

Solve $\frac{dy}{dx}=x+y$, $y(0)=1$ in the range using modified Evler's method taking $h=0.05$.

Ans. [MT-06, Page 294]

Q.4 विभाजन विधि से $x=2$ तथा $x=4$ के मध्य समीकरण $x^3-9x+1=0$ का मूल ज्ञात कीजिए।

Using the Bisection Method, find the root of the equation

$$x^3-9x+1=0$$

between $x=2$ and $x=4$.

Ans. [MT-06, P.No. 229]

Q.5 यदि संवृत पृष्ठ S की परिसीमा एक सरल संवृत चक्र C है तब सिद्ध कीजिए कि

If the boundary of closed surface S is a simple closed curve C then prove that

(i) $$\int_C (f\,\nabla g).d\vec{r}=\iint_S (\nabla f\times\nabla g).\hat{n}\,ds$$

(ii) $$\int_C (f\,\nabla g).d\vec{r}=-\int_C (g\nabla f).d\vec{r}$$

(iii) $\int_C f d\vec{r} = \iint_S (\hat{n} \times \nabla f)\, ds$

(iv) $\int_C \vec{r} \times \vec{dr} = 2\iint_S \hat{n}\, ds$

जहाँ F तथा g अदिश फलन है तथा $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Where F and g are scalar function and $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

Ans. [MT-06, P.No. 405]

Q.6 सिद्ध कीजिए कि

Prove that

(i) $\nabla\left(\vec{a}.\frac{\vec{r}}{r^n}\right) = \frac{a^n}{r^n} - \frac{n}{r^{n+2}}\left(\vec{a}.\vec{r}\right)\vec{r}$

(ii) $\nabla^2\left(\frac{x}{r^3}\right) = 0$

Ans. [MT-06, Page 323, 329]

Q.7 निम्न समीकरण का हल गॉस सीडेल पुनरावृति विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

Solve the following system of equations by using Gauss seidal iteration method.

$$10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 3$$
$$-2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 = 15$$
$$-x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 27$$
$$-x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 = -9$$

Ans. [MT-06, Page 268]

Q.8 समाकल $\int_{0.2}^{1.4}\left(\sin x - \log e^x + e^x\right) dx$ का मान

(i) सिम्पसन $1/3$ नियम (ii) सिम्पसन $3/8$ नियम

(iii) वैडल नियम से ज्ञात कीजिए

समाकल के सही मान से तीनों विधियों से प्राप्त मान में त्रुटि ज्ञात कीजिए।

Calculate the value of Integral $\int_{0.2}^{1.4}\left(\sin x - \log e^x + e^x\right)$ by

(i) Simpson's $1/3$ rule (ii) Simpson's $3/8$ rule

(iii) Weddle's rule.

Also finding the true value of the integral compare errors in the three cases.

Ans. [MT-06, P.No. 208]

Q.9 यदि सदिश $\vec{r}$ अदिश चर t का फलन हो तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

If $\vec{r}$ is vector function of scalar t, find

(i) $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\;\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$

(ii) $\frac{d^2}{dt^2}\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\;\frac{d^2 r}{dt^2}\right]$

(iii) $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\right]$

(iv) $\frac{d^2}{dt^2}\left[\vec{r}\times\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2 r}{dt^2}\right)\right]$

Ans. [MT-06, P.No. 310]

Q.10 सिद्ध कीजिए कि

Prove that

Curl $\left[\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)r^n\right]=(n+2)r^n\,\vec{a}-n\,r^{n-2}\left(\vec{r}\,.\,\vec{a}\right)\vec{r}$

Ans. [MT-06, Page 336]

Q.11 समाकल $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान

(i) सिम्पसन $1/3$ नियम (ii) सिम्पसन $3/8$ नियम

(iii) वैडल नियम से ज्ञात कीजिए

Calculate the value of Integral $\int_0^6 \frac{dx}{1+x^2}$ by

(i) Simpson's $1/3$ rule (ii) Simpson's $3/8$ rule

(iii) Weddle's rule.

Ans. [MT-06, P.No. 215]

Q.12 आयलर की अपरिवर्तित विधि द्वारा $h=0.02$ लेते हुए अंतराल $0\le x\le 0.6$ में निम्न अवकल समीकरण हल कीजिए

$\frac{dy}{dx}=x+\left|\sqrt{y}\right|$ जहाँ $y=1$ और $x=0$

Using modified Euler's method taking $h=0.02$ in the interval $0\le x\le 0.6$, solve the following differential equation

$\frac{dy}{dx}=x+\left|\sqrt{y}\right|$ Where $y=1$ and $x=0$

Ans. [MT-06, P. 291]

Q.13 सिद्ध कीजिए (Prove that)

(i) $\left(\frac{\Delta}{\in}\right)^2 x^3 = 6x\,,\, h=1$

(ii) $\left(\frac{\Delta^2}{\in}\right)\left(\frac{e^x \in e^x}{\Delta^2 e^x}\right) = e^x,\;\; h=1$

(iii) $\frac{\Delta^2}{\in}\sin(x+h)+\frac{\Delta^2 \sin(x+h)}{\in \sin(x+h)} = 2(\cosh -1)[\sin(x+h)+1]$

Ans. [MT-06, P.No. 33]

Q.14 द्विभाजन विधि से $x=2$ तथा $x=4$ के मध्य समीकरण $x^2-9x+1=0$ का मूल ज्ञात कीजिए।

Find the real root between $x=2$ and $x=4$ of the equation by $x^2-9x+1=0$ Bisection Method.

Ans. [MT-06, Page 229]

Q.15 समाकल $\int_C \left[(3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy\right]$ के लिए समतल में ग्रीन प्रमेय को सत्यापित कीजिए जहाँ C परवलयों $y^2=x$ एवं $y=x^2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र की परिसीमा है।

Verify Green's theorem in the plane for $\int_C \left[(3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy\right]$ where C is the boundary of the region defined by $y=x^2$ and $y^2=x$.

Ans. [MT-06, P.No.428]

Q.16 सिद्ध कीजिए (Prove that)

(i) $\left(\phi \vec{F}\right) = \vec{F}.\text{grad}\,\phi$ + div $\vec{F}$

(ii) $\nabla.\left(\vec{F}\times\vec{g}\right) = \vec{g}.\left(\nabla\times\vec{F}\right) - \vec{F}(\nabla\times g)$

(iii) div grad $\phi = \nabla^2\phi$

(iv) curl (grad ϕ)=0

Ans. [MT-06, P. 357, 359]

Q.17 सात समदूरस्थ कोटियां लेकर सिम्पसन के एक तिहाई सूत्र की सहायता से $\int_{-3}^{3} x^4 dx$ के सन्निकट मान की गणना कीजिए। इसकी तुलना सही तथा ट्रेपिजोइडल नियम द्वारा प्राप्त मानों से कीजिए। इस तुलना पर टिप्पणी लिखिए।

Calculate by Simpson's $1/3$ rule an approximate value of $\int_{-3}^{3} x^4 dx$ by taking seven equidistance ordinates. Compare it with exact value and the value obtained by using Trapezodial rule. Comment on this comparison.

Ans. [MT-06, P.No. 212]

Q.18 (i) निम्न समीकरणों को जैकाबी पुनरावृत्ति विधि द्वारा हल कीजिए।

Solve the following system of equations by using Jaccobi iteration method.

$$10x+2y+z=9$$
$$2x+20y-2z=-44$$
$$-2x+3y+10z=22$$

Ans. [MT-06, Page 263]

(ii) पिकार्ड की विधि द्वारा निम्न अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Using Picard's method, solve the following differential equation.

$$\frac{dy}{dx} = 1 - 2xy \quad \text{जहाँ (Where)} \quad y(0) = 0$$

Q.19 (i) स्टोक की प्रमेय द्वारा समाकल $\int_C \vec{F} . \vec{dr}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{F} = y^2\hat{i} + x^2\hat{j} - (x+z)\hat{k}$ तथा C, उस त्रिभुज की परिसीमा है जिसके शीर्ष $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ एवं $(1,1,0)$ है।

Evaluate $\int_C \vec{F} . \vec{dr}$ by Stoke's theorem where $\vec{F} = y^2\hat{i} + x^2\hat{j} - (x+z)\hat{k}$ and C is the boundary of triangle with vertices at $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ and $(1,1,0)$.

Ans. [MT-06, P.No.402]

(ii) समाकल $\iint_S \vec{F} . \hat{n}\, ds$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{F} = y^2 z\,\hat{i} + z^2 x\,\hat{j} + x^2 y\,\hat{k}$ तथा S, प्रथम अष्टांक में स्थित गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ का पृष्ठ है।

Evaluate $\iint_S \vec{F} . \hat{n}\, ds$ where $\vec{F} = x^2 y\,\hat{i} + x^2 z\,\hat{j} + x^2 y\,\hat{k}$ and S is the surface of sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ in the first ortant.

Ans. [MT-06, P.No. 374]

Q.20 यदि $\vec{F} = (2x^2 - 3z)\,\hat{i} - 2xyz\,\hat{j} - 4x\,\hat{k}$ तब समाकलों

(i) $\iiint_V \nabla \times \vec{F}\, dv$ (ii) $\iiint_V \nabla . \vec{F}\, dv$

का मान ज्ञात कीजिए जहाँ v समतलों $x=0$, $y=0, z=0$ तथा $2x+2y+z=4$ द्वारा घिरा आयतन है।

If $\vec{F} = (2x^2 - 3z)\,\hat{i} - 2xyz\,\hat{j} - 4x\,\hat{k}$ Evaluate

(i) $\iiint_V \nabla \times \vec{F}\, dv$ (ii) $\iiint_V \nabla . \vec{F}\, dv$

Where v is the volume bounded by the planes $x=0$, $y=0$, $z=0$ and $2x+2y+z=4$.

Ans. [MT-06, P. 379]

Q.21 प्रतिलोम अन्तर्वेशन की पुनरावृत्ति विधि के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित सारणी की सहायता से $y = f(x) = 1.285$ के लिए x का मान ज्ञात कीजिए।

Use method of iteration for inverse interpolation to find the value of x for $y = f(x) = 1.285$, given the following table.

x	0.736	0.737	0.738	0.739	0.740
$f(x)$	1.2832974	1.2841023	1.2849085	1.2857159	1.2865247

x	0.741

$f(x)$	1.2873348

Ans. [MT-06, P.No. 172]

Q.22 दिए गए अंतराल को 10 समान भागों में विभाजित कर समाकल $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)}\,dx$ का मान निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात कीजिए।

Divide the given interval into 10 equal parts Integrals $\int_0^1 \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)}\,dx$ by using following formulas.

(i) सिम्पसन $1/3$ नियम (Simpson's $1/3$ rule)

(ii) ट्रेपिजोइडल नियम (Trapizodial Rule)

Ans. [MT-06, Page 217]

Q.23 समाकल $\int_C \left[(3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy\right]$ के लिए समतल में ग्रीन की प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ C सरल रेखाओं $x=0$, $y=0$ एवं $x+y=1$ द्वारा परिभाषित क्षेत्र की परिसीमा है।

Verify Green's theorem in the plane for $\int_C \left[(3x^2-8y^2)dx+(4y-6xy)dy\right]$ where C is the boundary of the region defined by $x=0$, $y=0$ and $x+y=1$.

Ans. [MT-06, P.No.423]

Q.24 सिद्ध कीजिए (Prove that)

(i) $\text{curl}\left(\phi \vec{F}\right)=\phi\,\text{curl}\,\vec{F}+\text{grad}\,\phi\times\vec{F}$

(ii) $\text{curl}\left(\vec{F}\times\vec{g}\right)=\vec{F}\,\text{div}\,\vec{g}\,\text{div}\,\vec{F}+\left(\vec{g}.\nabla\right)\vec{F}-(F.\nabla)\vec{g}$

(iii) $\text{curl}\,(\text{grad}\,\phi)=\vec{0}$

(iv) $\text{div}\left(\text{curf}\,\vec{F}\right)=0$

Ans. [MT-06, P. 359]

Q.25 सिद्ध कीजिए (Prove that)

(i) $\delta\equiv\in^{1/2}\Delta$

(ii) $\delta\equiv\in^{1/2}\nabla$

(iii) $\mu^2\equiv1+\frac{\delta^2}{4}$

(iv) $\mu+\frac{\delta}{2}\equiv\in^{1/2}$

Ans. [MT-06, P.No. 141]

Q.26 सिम्पसन के $1/3$ तथा $3/8$ नियमों द्वारा $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ का परिकलन कीजिए। फलतः प्रत्येक स्थिति में π का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ using Simpson's $1/3$ and $3/8$ rule. Hence obtain the approximate value of π in each case.

Ans. [MT-06, Page 210]

Q.27 सदिश फलन $\vec{F} = (2x-y)\hat{i} + yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k}$ के लिए स्टोक की प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ S गोले $x^2+y^2+z^2=1$ का उपरी अर्धपृष्ठ है तथा C इसकी परिसीमा है।

Verify Stoke's theorem fro the vector field $\vec{F} = (2x-y)\hat{i} + yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k}$ over the upper half surface of $x^2+y^2+z^2=1$ bounded by its projection on the $x-y$ plane.

Ans. [MT-06, P.No.411]

Q.27 लम्बवृतीय बेलन $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=3$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर फलन $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ के लिए गॉस अपसरण प्रमेय का सत्यापन कीजिए। (Prove that)

Verify Gauss divergence theorem for $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ taken over the region bounded by the cylinder $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=3$.

Ans. [MT-06, P. 392]

Q.28 यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ अचर सदिश हो तो सिद्ध कीजिए कि

If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are constant vectors, prove that

(i) $\text{grad}\left[\left(\vec{r}\times\vec{a}\right).\left(\vec{r}\times\vec{b}\right)\right] = \left(\vec{b}\times\vec{r}\right)\times\vec{a} + \left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\times\vec{b}$

(ii) $\text{div}\left[\vec{r}\times\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\right] = -2\left(\vec{r}.\vec{a}\right)$

Ans. [MT-06, P.No. 361, 362]