Program Name B.Sc/B.A (Mathematics)
B.Sc./B.A. Part II
Paper Code – MT- 05 (Differential Equations))
Section – A
(Very Short Answer Questions अति लघु ऊत्तर वाले प्रश्न)
प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है Each Question Carries 2 Marks

(1) Find order and degree of the differential equation. (2)

$$xy\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2}{y+3}$$

Ans. Order = 1, degree = 1

(2) What is the integrating factor of $\frac{dy}{dx} + Py = Q$? (2)

Ans. I.F. = $e^{\int P\,dx}$

(3) Write the necessary condition for a differential equation of I order and I degree to be exact. (2)

Ans. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ for Differential Equation Mdx + Ndy =0

(4) What is singular solution of equation $y - xp - \frac{2}{p} = 0$ (2)

Ans. $y^2 = 8x$

(5) Define complementary function of linear differential equation with constant coefficients. (2)

Ans. Solution of L.D.E. $f(D)y = 0$ is called complementary function.

(6) State whether the given statement is True or False: (2)

Differential equation $f(D)y = Q(x)$ has the particular integral = $\frac{1}{f(D)} = Q(x)$

Ans. True

(7) What is partial Differential equation for $z = ax + ay + b$ eliminating a & b. (2)

Ans. $p = q$

(8) Define order and degree of Differential equation. (2)

अवकल समीकरण की कोटि व धात परिभाषित कीजिए।

Ans. Order : Order of highest order derivative present in differential equation if order of Differential Equation.

Degree : It is degree of highest derivative occurs in it, after the D.E. has been made free from radicals and fractions as far as the derivatives are concerned.

कोटि : अवकल समीकरण में विद्यामन अवकलजों की उच्चतम कोटि ही अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है।

धात : अवकल समीकरण को अवकलजों के सन्दर्भ में परिमेय और पूर्ण बीजीय बनाने के बाद उसमें आने वाले उच्चतम कोटि के अवकलन की धात ही उस अवकल समीकरण की धात कहलाती है।

(9) Solve: $\frac{dy}{dx} + y\ \tan x - \sec x = 0$ (2)

Ans. $y = \sin x + \cos x$

(10)Solve : $y(2xy + e^x)\ dx - \ e^x dy = 0$ (2)

Ans. $x^2 + \frac{e^x}{y} = c$

(11)Which factors are present in c-discriminant? (2)

Ans. Node locus, envelope, cusp locus.

(12)Solve: $(D^2 - 3D + 2)y = 0$ (2)

Ans. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

(13)State True or False: (2)

In Differential equation $f(D)y = Q(x)$, if $f(D) = (D + \alpha)$ then particular integral will be $\frac{1}{(D-\alpha)} Q(x) = e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} Q(x) dx$

Ans. True

(14) Find partial differential equation for $x = A\ e^{py}\ \sin px$, eliminating A and p. (2)

Ans. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(15)Solve : $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ (2)

Ans.$e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$

(16) Define general solution of differential equation. (2)

अवकल समीकरण के व्यापक हल को परिभाषित कीजिए।

Ans.यदि अवकल समीकरण के हल में समीकरण की कोटि के बराबर स्वेच्छा अचर हों तो उे व्यापक हल कहते हैं।

Let the order of D.E. is n. If the solution of D.E. contains n independent arbitrary constants, the solution is called General solution.

(17) What will be integrating factor of Differential equation (Which is homogenous) $M\ dx + N\ dy = 0, if\ Mx + Ny\ \neq 0$ (2)

यदि समी. $M\ dx + N\ dy = 0$ समघात समीकरण हो तथ $Mx + Ny\ \neq 0$ तो समी. का समाकलन गुणांक क्या होगा?

Ans.I.F. = $\frac{1}{Mx+Ny}$ (समाकल गुणांक)

(18) What is form of Lagrange's Differential Equation of first order and higher degree.

प्रथम कोटि व अधिक धात की लाग्रांज अवकल समीकरण लिखो। (2)

Ans.$y = x\ \&(p) +\ f(p);\ p = dy/dx$

(19) Solve : (हल कीजिए) $(D^4 + 4)y = 0$ (2)

Ans.$y = e^{-x}[c_1\ Cos\ x +\ c_2\ Sinx\ ] +\ e^x[c_3\ Cos\ x + c_4\ Sin\ x]$

(20) Mention True/False : (सत्य/असत्य जाँचिए) (2)

The solution of differential equation of nth order has n arbitrary constants.

N कोटि की अवकल समीकरण के हल में n स्वेच्छा अचर होते हैं।

Ans.True

(21) Find partial Differential equation for $z = ax + by + a^2 + 2ab$ eliminating a & b.

a व b के विलोपन से $z = ax + by + a^2 + 2ab$ के लिए आंशिक अवकल समीकरण लिखिए।

(2)

Ans.$z = xp + qy + p^2 + 2pq$

(22) A function $f(x, y) = xy^2$. Satisfy Lipschitz condition in Rectangle R, where $R: |x| \leq 1, |y| \leq 1$, because $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq 2|y_2 - y_1|$, then what will be the value of Lipschitz constant?

फलन $f(x, y) = xy^2$ आयत R में जहाँ $R: |x| \leq 1, |y| \leq 1$ लिपशीज़् प्रतिबंध को सन्तुष्ट करता है क्योंकि $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq 2|y_2 - y_1|$ तो लिपशीज़् स्थिरांक का मान क्या होगा?

Ans.K = 2

(23) Solve (हल कीजिए):

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right) + y\log y = xye^x$$

Ans.x $\log y = e^x(x-1) + c$

(24) What is the integrating factor to make the given differential equation exact?

(दी गई समीकरण को यथातथ बनाने के लिए समाकलन गुणक क्या होगा?)

$$(xy\ \sin xy + \cos xy)ydx+)(xy\ \sin xy - \cos xy)xdy = 0$$

Ans.I.F. (समाकलन गुणक) = $\frac{1}{2xy\ \cos xy}$

(25) $z = 2f\left(\log y + \frac{1}{x^2}\right)$ से f का विलोपन कीजिए।

Obtain Partial differential equation eliminating f from $z = 2f\left(\log y + \frac{1}{x^2}\right)$

Ans.$x^3p + 2qy = 0$

(26) Solve: (हल कीजिए) $3px + 6p^2y^2 - y = 0$

Ans.$y^3 - 3cx + 6c^2$

(27) Write Auxiliary equation of Charpit' method.

चारपिट विधि के लिए सहायक समीकरण लिखिए।

Ans. $\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dz}{-p\frac{\partial f}{\partial p}-q\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{df}{0}$

(28) Solve: (हल कीजिए) $se^x \tan dx + (1 - e^x)sec^2 ydy = 0$

Ans.$tany = c(1 - e^x)^3$

(29) State existence and uniqueness theorem for Initial value problem.

प्रारम्भिक मान समस्या के लिए अस्तित्व एवं अद्वितीयता प्रमेय का कथन लिखिए।

Ans. (i) If function f(x,y) is a real and continuous function in Rectangle R, where $R: |x - x_0| \leq a$; $|y - y0\leq b;(a,b>0)$

(ii) On R, $|f(x, y)| \leq M$

(iii) f(x,y) satisfy Lipschitz condition $|f(x_1 y_1) - f(x_1 y_0)| \leq K|y_1 y_2|$ with respect to y in R (here K is Lipschitz constant).

Then there exists a unique solution of an initial value problem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$, in internal $|x - x_0| \leq h$, where $h < \min(a\frac{b}{m})$

(i) यदि फलन f(x,y) आयत R में वास्तविक तथा सतत फलन है जहाँ $R: |x - x_0| \leq a$; $|y - y_0| \leq b; (a, b > 0)$

(ii) R पर $|f(x, y)| \leq M$

(iii) फलन f, R में y के सपेक्ष लिपशीज् प्रतिबन्ध $|f(x_1 y_1) - f(x_1 y_0)| \leq K|y_1 y_2|$ को सन्तुष्ट करता है (K=लिपशीज् स्थिरांक), तब अन्तराल $|x - x_0| \leq h$ में प्रारम्भिक मान $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ समस्या के एक अद्वितीय हल का अस्तित्व होगा, जहाँ $h < \min(a\frac{b}{m})$

(30)Define standard form of Bernoulli' I order & I degree differential equation.

बरनौली समीकरण का मानक रूप बताओ।

Ans.$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$

(31) Define order of Partial differential Equation.

आंशिक अवकल समीकरण की कोटि को परिभाषित कीजिए।

Ans.The order of highest order, partial derivative is called order of Partial Differential equation.

आंशिक अवकल समीकरण में उपस्थित उच्चतम आंशिक अवकलज की कोटि की आंशिक अवकल समी. की कोटि कहलाती है।

(32) The differential equation of first order and first degree having three variables can e written in the following form:

तीन चरों वाले प्रथम कोटि व प्रथम घात के अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है —

$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ (True/False)

Ans.True

(33) What the operation D^{-1} $is\ used\ for?$

सँकारक D^{-1} किस सँक्रिया के लिए प्रयुक्त होता है?

Ans.Integration (समाकलन)

(34) Write complementary function for $r - 4s + 4t = 0$

(हल कीजिए) $r - 4s + 4t = 0$

Ans.$C.F. = \emptyset_1(y + 2x) + x\emptyset_2(y + 2x)$

(35) If $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$; $y = 1$ for x=1 Find y when x=-1

X=-1 के लिए y का मान ज्ञात कीजिए यदि $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$; $y = 1$जब x=1.

Ans.Y=-1 for x=-1

(36) Check whether the given equation is exact or not :

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dc^2}+2(2x+1)\frac{dy}{dx}+2y=0$$

जाँचिए कि दी गई समीकरण यथार्थ है अथवा नहीं:

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dc^2}+2(2x+1)\frac{dy}{dx}+2y=0$$

Ans. Exact (यर्थाथ है)

(37) Define Total Differential Equation.

साधारण अवकल समीकरण को परिभाषित करें।

Ans. When the differential coefficients in any differential equation are with respect to any one independent variable, then D.E. is called Total D.E.

जब किसी अवकल समीकरण में अवकल गुणांक केवल एक ही स्वतंत्र चर के सापेक्ष हो तो उसे साधारण अवकल समीकरण कहते हैं।

(38) Write the notation for $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Ans. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ के लिए संकेतन क्या होगा?

(39) Write the order and degree for the given P.D.E.

दी गई आंशिक अवकल समी. की कोटि व घात क्या होगी?

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{1}{x^2}$$

Ans.Order = 3, Degree = 1

(40) Solve: (हल कीजिए) $\quad x-y-p^2=0$

Ans. $y+c=-2\left[\frac{(x-y)}{2}+\sqrt{x-y}+\log(\sqrt{x-y}-1)\right]$

(41) Solve: (हल कीजिए) $\quad (D^4-D^{14})z=\log(x+y)$

Ans. $\emptyset_1(y+x)+\emptyset_2(y-x)+\emptyset_3(y+ix)+\emptyset_4(y-ix)$

(42) Solve: (हल कीजिए) $\quad (1-x)dy-(3+y)dx=0$

Ans. $(3+y)(1-x)=k$

(43) Define Auxiliary equation of linear differential equation with constant coefficients.

अचर गुणांक वाली रैखिक अवकल समीकरण की सहायक समीकरण को परिभाषित कीजिए।

Ans. Consider the differential equation $f(D)y=0\ or\ (D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\cdots..+an)y=0 \qquad -(1)$

then $m^n+a_1m^{n-1}+\cdots+an=0\ or\ f(m)=0$ is called Auxiliary equation of (1).

माना अवकल समीकरण $f(D)y = 0 \; or \; (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots .. + an)$

$y = 0$ है। तब समी. सीम. की सहायक समी. $m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + an = 0 \; or \; f(m) = 0$ कहलाएगी।

(44) Define singular solution of a differential equation.

अवकल समीकरण के विचित्र हल को परिभाषित कीजिए।

Ans.अवकल समीकरण का वह हल जो व्यापक हल में स्वेच्छा अचरों को विशिष्ट मान देने पर प्राप्त नहीं होता है, उसे विचित्र हल कहते हैं।

A solution of D.E. which cannot be obtained from any general solution of D.E. by any choice of n independent arbitrary constants is called a singular solution.

(45) Write the form of clairaut's equation.

अवकल समी. का क्लॉरेट समी. रूप बताइए।

Ans.The D.E. of the form $y = xp + f(p)$ is known as clairaut's equation.

$y = xp + f(p)$ रूप का समी. क्लैरॉट समीकरण कहलाता है।

(46) Define p-discriminant relation.

p- विविक्तिकर की परिभाषा दीजिए।

A. Let $f(x, y, p) = 0$ be the given D.E. and $p = dy/dx$ regarded as parameter. Then p-discriminant relation is obtained by eliminating p between the equations $f(x, y, p) = 0 \, ; \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$

B. माना $f(x, y, p) = 0$ दी गई अवकल समी. है। तब p-विविक्तिकर समीकरणों $f(x, y, p) = 0 \, ; \frac{\partial f}{\partial p} = 0$ में से p के विलोपन से प्राप्त होता है।

(47) Define Initial value problems.

प्रारम्भ मान समस्याएँ क्या होती हैं?

Ans.ऐसी समस्याएँ जहाँ अवकल समीकरण को हल करने के लिए प्रारम्भिक बिन्दु पर सभी प्रतिबन्ध ज्ञात हों, प्रारम्भिक मान समस्याएँ कहलाती हैं।

The problem in which all conditions are given at initial point along with the differential equation, is known as I.V.P.

(48) Taking $z = \sin x$ in $\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x \frac{dy}{dx} + y \, cos^2 x = 0.$ What will be complete solution if D.E.?

अवकल समी. $\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x \frac{dy}{dx} + y \, cos^2 x = 0$ में $z = \sin x$ रखने पर समी. का पूर्ण हल क्या होगा?

Ans.$y = C_1 Cos \, (\sin x + \; c_2)$

(49) For finding particular integral method of variation of parameters, it is necessary to know complete complementary function. (True/False)

प्राचल विचरण विधि से विशिष्ट समाकल ज्ञात करने के लिए सम्पूर्ण पूरक फलन ज्ञात होना आवश्यक है।

Ans.True

(50) What is form of Lagrange's Differential Equation of first order and higher degree.

प्रथम कोटि व अधिक धात की लाग्रांज अवकल समीकरण लिखो।

Ans. $y = x\ \&(p) + f(p);\ p = dy/dx$