

**Program Name B.Sc./B.A. (Mathematics)**  
**B.Sc. /B.A. - Part II**  
**Paper Code – MT- 04 (Real Analysis & Metric space)**  
**Section – B**

**(Short Answer Questions लघु उत्तर वाले प्रश्न)**

**प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है Each Question Carries 6 Marks**

- प्र.1 फलन  $f(x)$  की  $x = 2$  पर सांतत्य की जाँच कीजिये, जहाँ  
(Test the continuity of the function  $f(x)$  at  $x = 2$  where)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 2 \\ \frac{-1}{e^{(x-2)^2}} & ; x \neq 2 \end{cases}$$

उत्तर MT – 04, P.No. 98, उदाहरण 5

- प्र.2 सिद्ध कीजिये कि फलन  $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $(0, 1)$  पर संतत नहीं है।

(Show that the function  $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$  is not continuous at  $(0, 1)$ .)

उत्तर MT – 04, P. No. 148, उदाहरण 6

- प्र.3 यदि  $f(x) = x^2$ ,  $\forall x \in (0, 1)$  तथा यदि  $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$  अन्तराल  $(0, 1)$  का कोई विभाजन है, तब  $L(p, f)$  एवं  $V(p, f)$  की गणना कीजिए।

(If  $f(x) = x^2$ ,  $\forall x \in (0, 1)$  and if  $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$  is a partition of  $(0, 1)$ , then find  $L(p, f)$  and  $V(p, f)$ .)

उत्तर MT – 04, Page No. 164, उदाहरण 1

- प्र.4 सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम  $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ , 0 को अभिसृत होती है।

(Prove that the sequence  $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$  converges to 0)

उत्तर MT – 04, P.No. 57-58, उदाहरण – 1 (iv)

- प्र.5 द्वितीय माध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिये

(Used second mean value theorem, show that)

$$\frac{\pi^3}{15} < \int_0^\pi \frac{x^2}{3+2\cos x} dx < \frac{\pi^3}{3}$$

उत्तर MT – 04, P.N. 204, उदाहरण 5

- प्र.6 प्रदर्शित कीजिए कि अनुक्रम  $\langle f_n \rangle$  जहाँ  $f_n(x) = \frac{x^2 x}{1+n^4 x^2}$  वास्तविक संख्याओं के समुच्चय  $R$ , पर एक समान अभिसारी नहीं है।

(Show that the sequence of functions  $\langle f_n \rangle$ , where  $f_n(x) = \frac{x^2 x}{1+n^4 x^2}$  is not uniformly convergent on set of real number  $R$ .)

उत्तर MT – 04, P.No. 221, उदाहरण 4

प्र.7 समुच्चय  $X = [0, 1]$  में सामान्य दूरीक  $d(x, y) = |x - y|$  के लिये विवृत गोला  $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  तथा  $\bar{S}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$  संवृत गोला ज्ञात कीजिये।

(Find the open sphere  $S\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  and closed sphere  $\bar{S}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$  for the metric  $d(x, y) = |x - y|$  defined on set  $X = [0, 1]$ )

उत्तर MT – 04, P.No. 293, उदाहरण 4

प्र.8 सिद्ध कीजिये कि एक दूरीक समष्टि का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संहत होता है।  
(Show that every finite subset of a metric space is compact.)

उत्तर MT – 04, P.No. 330, प्रमेय 1

प्र.9 सिद्ध कीजिये कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं।  
(Show that there are infinite rational numbers between any two different real numbers.)

उत्तर MT – 04, P.No. 21, प्रमेय 1.9

प्र.10 यदि  $\{x_n\}$  धनात्मक पदों का अनुक्रम हो तथा  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$  हो, तो  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_1 x_2 \dots x_n\}^{1/n} = l$  होगा। सिद्ध कीजिए।  
(If  $\{x_n\}$  is sequence of positive real numbers and  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ , then

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_1 x_2 x_3 \dots x_n\}^{1/n} = l$ . Prove this result.)

उत्तर MT – 04, P. No. 80, प्रमेय 4.8

प्र.11 सिद्ध कीजिये कि फलन  $f$ ,  $x = 0$  पर संतत है जहाँ  
(Prove that the function  $f$  is continuous at  $x = 0$  where)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + \cos x & ; x \neq 0 \\ 2 & ; x = 0 \end{cases}$$

उत्तर MT – 04, Page No. 96, उदाहरण 1

प्र.12 सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन  $x = 0$  पर अवकलनीय है।  
(Prove that the function  $f$  is differentiable at  $x = 0$ , where)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \text{जब } x \text{ परिमेय संख्या नहीं है। (} x \text{ is irrational)} \\ x & ; \text{जब } x \text{ परिमेय संख्या है। (} x \text{ is rational)} \end{cases}$$

उत्तर MT – 04, P.No. 126, उदाहरण – 2

प्र.13 सिद्ध कीजिये कि फलन (show that the function)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 x}{x^2 + y^6} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूल बिन्दु पर असंतत है (is discontinuous at  $x=0$ .)

उत्तर MT – 04, P.N. 149, उदाहरण 7

प्र.14 प्रदर्शित कीजिये कि प्रत्येक स्थिरांक अर्थात्  $f(x)=k$ ,  $\forall x \in [a, b]$  रीमान समाकलनीय होता है तथा

$$\int_a^b k dx = k(b-a).$$

(Show that the every constant function  $f(x)=k$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , is Reimann-integrable and  $\int_a^b k dx = k(b-a)$ )

उत्तर MT – 04, P.No. 166, उदाहरण 3

प्र.15 निम्न फलनों पर द्वितीय माध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिये।

(Verify the second mean value theorem for the following questions.)

$$f(x)=x, g(x)=e^x, \forall x \in [-1, 1]$$

उत्तर MT – 04, P.No. 205, उदाहरण 6

प्र.16 प्रदर्शित कीजिये कि श्रेणी  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+x^2)}$ ,  $\forall x \in R$  के लिये एक समान अभिसारी है।

(Show that the series  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+x^2)}$ ,  $\forall x \in R$  is uniformly convergent for all  $x \in R$ .)

उत्तर MT – 04, P.No. 241, उदाहरण 23

प्र.17 सिद्ध कीजिये कि  $\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है?

(Prove that  $\sqrt{2}$  an irrational number.)

उत्तर MT – 04, P.No. 25, उदाहरण 4

प्र.18 सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम  $\left\{ \frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \right\}$ , 2 को अभिसृत होती है।

(Prove that the sequence  $\left\{ \frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \right\}$  converges to 2.)

उत्तर MT – 04, P. No. 57, उदाहरण 1 (ii)

प्र.19  $K$  के किस मान के लिये फलन

(For what value of  $K$ , the function)

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2 - Kx & ; x > 1 \\ 5x - 3K & ; x \leq 1 \end{cases}$$

$x=1$  पर संतत होगा।

(is continuous at  $x=1$ .)

उत्तर MT – 04, Page No. 98, उदाहरण 4

प्र.20 दिखाइये कि फलन (show that the function)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x+y)\cos\left(\frac{1}{x+y}\right) & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूल बिन्दु पर संतत है।

(is continuous at  $x = 0$ .)

उत्तर MT – 04, P.No. 147, उदाहरण – 4

प्र.21 द्वितीय मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हुए प्रदर्शित कीजिए कि  
(Using second mean value theorem, prove that)

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx < \frac{1}{3}$$

उत्तर MT – 04, P.N. 203, उदाहरण 4

प्र.22 प्रदर्शित कीजिए कि  $x = 0$  पर अनुक्रम  $\langle f_n \rangle$  एक समान अभिसारी नहीं है जहाँ  
(Show that the sequence  $\langle f_n \rangle$  is not uniformly convergent at  $x = 0$ , where)

$$f_n(x) = nx(1-x)^n, \forall x \in [0, 1]$$

उत्तर MT – 04, P.No. 225, उदाहरण 7

प्र.23 माना  $X$  संवृत अन्तराल  $[0, 1]$  पर परिभाषित सभी संतत् वास्तविक मान फलनों का समुच्चय है व  
 $d : X \times X \rightarrow R$  निम्न प्रकार परिभाषित है  
(Let  $X$  be a set of all real valued continuous functions defined on  $[0, 1]$  and  
 $d : X \times X \rightarrow R$  is defined as)

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|, \forall f, g \in X$$

समाहित समाकलन रीमान समाकलन है। प्रदर्शित करो कि,  $d, X$  पर दूरीक है।

(Given integral is Riemann-integral, show that  $d$  is metric on  $X$ .)

उत्तर MT – 04, P.No. 284, उदाहरण 5

प्र.24 यदि  $A$  व  $B$  किसी दूरीक समष्टि  $(X, d)$  के दो अरिक्त समुच्चय हो, तो प्रदर्शित कीजिये कि  
(If  $A$  and  $B$  are non-void subsets of metric spaces  $(X, d)$ , then show that)

$$(i) \quad \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A, B) + \delta(B)$$

$$(ii) \quad \delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B), \text{ यदि } A \cap B = \phi$$

उत्तर MT – 04, P.No. 290, प्रमेय 4

प्र.25 यदि  $F$  एक क्रमित क्षेत्र हो तथा  $a \in F$ , तो सिद्ध करो।  
(If  $F$  is an ordered field and  $a \in F$ , then prove)

$$a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$$

उत्तर MT-04, P.No. 6, प्रमेय 1.1 (i)

प्र.26 सिद्ध कीजिये की वास्तविक संख्याओं के समुच्चय  $R$  का अरिक्त उपसमुच्चय  $A$  विवृत है यदि और केवल यदि  $A$  को विवृत अन्तरालों के संघ के रूप में लिखा जा सके।  
(Show that any non-void subset  $A$  of set  $R$  of all real numbers, is open iff the set  $A$  can be written as union of open intervals.)

उत्तर P.N. 34, प्रमेय - 4

प्र.27 If (यदि)  $\{x_n\}$  व (and)  $\{y_n\}$  दो अभिसारी अनुक्रम हैं (are two convergent sequences) तथा (and)  $\lim x_n = l$  and  $\lim y_n = l'$  सिद्ध करो (prove)

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{l}{l'}, y_n \neq 0, l' \neq 0$$

उत्तर P.No. 52, उदाहरण 3.2 (4)

प्र.28 सिद्ध करो कि अनुक्रम अभिसारी है।  
(Prove that the following sequence is convergent.)

$$\left\{ \frac{3n!}{(n!)^2} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

उत्तर P.N. 88, उदाहरण - 5

प्र.29 सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन  $x = 0$  पर संतत व अवकलनीय है।  
(Prove that the following function is continuous and differentiable at  $x = 0$ )

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; x \text{ अपरिमेय है। (} x \text{ is irrational)} \\ x & ; x \text{ परिमेय है। (} x \text{ is rational)} \end{cases}$$

उत्तर P.N. 126, उदाहरण 2

प्र.30 सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन मूल बिन्दु पर संतत है।  
(Prove that the following function is continuous at origin.)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

उत्तर P.No. 148, उदाहरण 5

प्र.31 डारबू प्रमेय का कथन कर इसकी उत्पत्ति कीजिये।  
(State Darboux theorem and prove it.)

उत्तर P.No. 159, प्रमेय 6

प्र.32  $M_n$  परीक्षण का कथन कर इसकी उत्पत्ति कीजिए।  
(State the  $M_n$ -Test and prove it.)

उत्तर P.No. 222, 10.5.1

प्र.33 यदि  $F$  एक क्रमित क्षेत्र हो तथा  $a \in F$ , तो सिद्ध करो।  
(If  $F$  is an ordered field and  $a \in F$ , then show that.)

$$a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$$

उत्तर P.N. 6, प्रमेय 1.1 (ii)

प्र.34 सिद्ध करो कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय  $R$  का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संतत होता है।  
(Prove that any finite subset of  $R$  is compact.)

उत्तर P.N. 38, प्रमेय - 8

प्र.35 सिद्ध करो कि अनुक्रम  $\left\{ \frac{3n-1}{4n+5} \right\}$ ,  $\frac{3}{4}$  को अभिसृत होती है?

(Prove that the sequence  $\left\{ \frac{3n-1}{4n+5} \right\}$  converges to  $\frac{3}{4}$ .)

उत्तर P.No. 57-58, उदाहरण 1 (iii)

प्र.36 सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन  $x=0$  पर संतत नहीं है?

(Prove that the following function is not continuous at  $x=0$ )

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x=0 \\ 1 - \frac{|x|}{x} & ; x \neq 0 \end{cases}$$

उत्तर P.N. 96, उदाहरण - 1

प्र.37 फलन  $f(x) = |x-2| + 2|x-3|$ ,  $\forall x \in [1, 4]$  की अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

(Test the differentiability of the function  $f(x) = |x-2| + 2|x-3|$ ,  $\forall x \in [1, 4]$ )

उत्तर P.N. 128, Q.No. 4

प्र.38 सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन  $(0, 0)$  पर संतत नहीं है।

(Prove that the following function is not continuous of  $(0, 0)$ )

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & ; x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & ; x = 0, y = 0 \end{cases}$$

उत्तर P.No. 151, Q.No. 3

प्र.39 रीमान समाकलनीयता को परिभाषित कीजिये तथा एक उदाहरण दीजिये जो रीमान समाकलनीय है।

(Define Reimann integrability and given an example of function which is Reimann-integrable.)

उत्तर P.No. 161, 8.4.1

प्र.40 सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम  $\langle f_n \rangle$ , जहाँ  $f_n(x) = -(1-x^2)^n$   $x=0$  पर एक समान अभिसारित नहीं है।

(Show that the sequence  $\langle f_n \rangle$ , where  $f_n(x) = -(1-x^2)^n$  is not uniformly convergent at  $x=0$ .)

प्र.41 यदि  $F$  एक क्रमित क्षेत्र हो तथा  $a \in F$ , तो सिद्ध करो।

(If  $F$  is an ordered field and  $a, b \in F$  prove.)

$$a > b > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

उत्तर P.N. 6, प्रमेय 1.1 (iii)

प्र.42 सिद्ध करो कि कोई भी विवृत अन्तराल संतत नहीं होता है?

(Prove that any open interval is not compact.)

उत्तर P.N. 39, प्रमेय - 9

प्र.43 सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम  $\left\{ n^{1/n} \right\}$ , 1 को अभिसृत होती है?

(Prove that the sequence  $\left\{ n^{1/n} \right\}$  converges to 1.)

उत्तर P.No. 62, उदाहरण 3

प्र.44 निम्न फलन  $R$  पर संतत है?

(The following function is continuous on  $R$ )

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & ; x < 4 \\ 4 & ; x = 4 \\ 4ax - b & ; x > 4 \end{cases}$$

$a$  व  $b$  के मान ज्ञात कीजिए। (Find the value of  $a$  and  $b$ )

उत्तर P.N. 99, उदाहरण - 6

प्र.45 सिद्ध कीजिये कि फलन  $f(x) = \sin x$ ,  $x$  के प्रत्येक मान के लिये अवकलनीय है?

(Prove that the function  $f(x) = \sin x$  is differentiable on  $R$ .)

उत्तर P.N. 121, उदाहरण 3

प्र.46 अन्तराल  $[2, 6]$  में फलन  $f(x) = 8x - x^2$  के लिये रोल प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

(Verify Rolle's theorem for the function  $f(x) = 8x - x^2$  in the interval  $[2, 6]$ .)

उत्तर P.No. 137, उदाहरण 1

प्र.47 सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन रीमान समाकलनीय होता है?

(Show that every monotone function is Riemann-integrable)

प्र.48 फलनों की अनुक्रम का एकसमान अभिसरण को परिभाषित कर, उदाहरण से समझाइये।

(Taking an example, explain the uniform convergence of sequence of functions.)

प्र.49 यदि  $F$  एक क्रमित क्षेत्र हो तथा  $a \in F$ , तो सिद्ध करो।

(If  $F$  is an ordered field and  $a, b \in F$  prove.)

$$a < 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0$$

उत्तर P.N. 5, प्रमेय 1.1 (ix)

प्र.50 माना (Let)  $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ । प्रदर्शित कीजिये कि  $0 \in \mathbb{R}$ ,  $A$  का सीमा बिन्दु है। (show that  $0 \in \mathbb{R}$  is

limit point of  $A$ .)

उत्तर P.N. 30, उदाहरण 1

प्र.51 यदि (if)  $\{x_n\}$  व  $\{y_n\}$  दो अभिसारी अनुक्रम हैं।

(are two convergent sequence and let  $\lim x_n = l$  and  $\lim y_n = l'$ , then prove

$$\lim \{x_n - y_n\} = l - l'$$

उत्तर P.No. 52, प्रमेय 3.2 (2)

प्र.52 सिद्ध करो (Prove that)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(n+1)(n+2) - (2n)}{n^n} \right]^{1/n} = \frac{4}{e}$$

उत्तर P.N. 87, उदाहरण - 4

प्र.53 निम्न फलन की  $x = 1$  व  $2$  पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

(Test the following function for differentiability at  $x = 1$  and  $x = 2$ )

$$f(x) = |x-1| + |x-2|, \forall x \in [0, 3]$$

उत्तर P.N. 123, उदाहरण 6

प्र.54 सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन कि  $(0, 0)$  पर युगपत सीमा विद्यमान नहीं है?  
(Prove that the limit of the following function at  $(0, 0)$  doesn't exist.)

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

उत्तर P.No. 142, उदाहरण 1

प्र.55 यदि फलन  $f$ , संव्रत अन्तराल  $[a, b]$  में परिबद्ध है तथा यदि  $p_1$  व  $p_2$ ,  $[a, b]$  के कोई दो स्वेच्छ विभाजन है तो सिद्ध करो

(If  $f$  is bounded function on  $[a, b]$  and if  $p_1$  and  $p_2$  are two arbitrary partition of  $[a, b]$  then prove that)

(i)  $L(p_1, f) \leq U(p_2, f)$

(ii)  $L(p_2, f) \leq U(p_1, f)$

उत्तर P.No. 157 प्रमेय - 3

प्र.56 फलनों की श्रेणी के एकसमान अभिसरण के उदाहरण देकर समझाइये।

(Taking an example, explain the uniform of convergence of series of functions.)

उत्तर P.No. 215, 10.3