

Program Name B.Sc./B.A. (Mathematics)
B.Sc. /B.A. - Part II
Paper Code – MT- 04 (Real Analysis & Metric space)
Section – C

(Long Answer Questions दीर्घ उत्तर वाले प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न 14 अंक का है Each Question Carries 14 Marks

- प्र.1 बॉलजिनो वाइस्ट्रास प्रमेय का कथन कीजिए तथा इसे सिद्ध कीजिये।
(State the Bolzano wiertrass theorem and prove this.)
उत्तर MT – 04, P.N. 74 प्रमेय 4.3
- प्र.2 सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$, जहाँ $x_n = \frac{2n}{3n+4}$, $\forall n \in N$ एक दिष्ट वर्धमान एवं परिबद्ध है। इसकी सीमा l ज्ञात कीजिए और जब $\epsilon = \frac{1}{100}$ हो तो $|x_n - l| < \epsilon$, $\forall n > n_0$ के लिये n_0 का मान भी ज्ञात कीजिए
(Show that the sequence $\langle x_n \rangle$, where $x_n = \frac{2n}{3n+4}$, $\forall n \in N$ is monotonically increasing and bounded. Also, find its limit l and when $\epsilon = \frac{1}{100}$, then what is the value of n_0 for $|x_n - l| < \epsilon$, $\forall n > n_0$)
उत्तर MT – 04, P.No. 60, उदाहरण 2
- प्र.3 प्रदर्शित कीजिये कि फलन (show that the function)
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है (if } x \text{ is rational)} \\ 1-x, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है (if } x \text{ is irrational)} \end{cases}$$
अन्तराल $[0, 1]$ पर रीमान समाकलनीय नहीं है
(is not Reimann-integrable on $[0, 1]$.)
उत्तर MT – 04, P.No. 168, उदाहरण 5
- प्र.4 प्रदर्शित कीजिये कि श्रेणी (show that the series)
$$\frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+2x)(1+3x)} + \dots$$
अन्तराल $[a, \infty]$ में एक समान अभिसारी है जहाँ $a > 0$, परन्तु अन्तराल $[0, \infty]$ में यह विन्दुशः अभिसारी है। (is uniformly convergent on the interval $[a, \infty]$, $a > 0$, but it is pointwise convergent on $[0, \infty]$.)
उत्तर MT – 04, P. No. 219, उदाहरण 3

प्र.5 माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $A, B \subset X$ के दो उपसमुच्चय है तब सिद्ध कीजिये
(Let (X, d) be metric space and A, B are two subsets of X , then show that)

- (i) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$ (ii) $(A \cap B)^\circ \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ$
(iii) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$

उत्तर MT – 04, P.N. 302 प्रमेय 7

प्र.6 सिद्ध कीजिये कि फलन f , जहाँ (Show that the function f , where)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & , \text{ यदि } x \text{ परिमेय है (if } x \text{ is rational)} \\ \sin x & , \text{ यदि } x \text{ अपरिमेय है (if } x \text{ is irrational)} \end{cases}$$

अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ पर रीमान समाकलनीय नहीं है।

(is not Reimann-integrable on the interval $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.)

उत्तर MT – 04, P.No. 171, उदाहरण 7

प्र.7 प्रदर्शित कीजिए की अनुक्रम $\langle f_n \rangle$, जहाँ $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $\forall x \in R$ एक समान अभिसारी है।

(Show that the sequence $\langle f_n \rangle$, where $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $\forall x \in R$ is uniformly convergent.)

उत्तर MT – 04, P.No. 224, उदाहरण 6

प्र.8 (i) समुच्चय $S = \left\{x : x = \frac{n}{n+1} : x \in N\right\}$ का उच्चक व निम्न क्या होगा?

(Find the supremum and infimum of the set $S = \left\{x : x = \frac{n}{n+1} : x \in N\right\}$)

(ii) यदि p व q क्रमशः परिमेय तथा अपरिमेय संख्या हो तो $p+q$ और pq ($p \neq 0$) अपरिमेय संख्या होती है। सिद्ध कीजिये।

(If p and q are rational and irrational numbers respectively, then show that $p+q$ and pq are irrational numbers.)

उत्तर (i) MT – 04, P. No. 12, उदाहरण 1 (ii)

(ii) MT – 04, P. No. 18, प्रमेय 1.4

प्र.9 माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $A, B \subset X$ के कोई दो उपसमुच्चय हैं। प्रदर्शित कीजिये कि
(Let (X, d) be a metric space and A, B are any two subsets of X , then show that)

- (i) $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$
(ii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
(iii) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

उत्तर MT – 04, P.N. 308

प्र.10 यदि $x, y \in R$ हो, तो सिद्ध कीजिए
(If $x, y \in R$, then show that)

(i) $|x| = \max\{x, -x\}$ (ii) $x \leq |x|$ and $-x \leq |x|$

(iii) $|xy| = |x||y|$ (iv) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

उत्तर MT – 04, P.No. 22, प्रमेय 1.10

प्र.11 सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$, 2 को अभिसृत होगी, जहाँ

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \text{ व } x_1 = \sqrt{2} \text{ है।}$$

(Prove that the sequence $\{x_n\}$ converges to 2

Where $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, and $x_1 = \sqrt{2}$)

उत्तर MT – 04, P.No. 63, उदाहरण 5

प्र.12 फलन $f(x) = |x-1| + |x-2|$ की अन्तराल $[0, 3]$ में सांतत्य व अवकलनीयता की जाँच कीजिये।

(Test the continuity and differentiability of the function $[0, 3]$ on the interval $[0, 3]$)

उत्तर MT – 04, P. No. 123, उदाहरण 6

प्र.13 (i) यदि $x, y \in R$ हो तो (if $x, y \in R$, then prove) सिद्ध करो।

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(b) $|x - y| \geq |x| - |y|$

(ii) सिद्ध कीजिये कि किसी परिमेय संख्या का घन 3 नहीं है।

(Prove that 3 is not cube of any rational number.)

उत्तर P.N. 24-25 प्रमेय 1.11. उदाहरण 3

प्र.14 हेने-बोरेल प्रमेय का कथन कर, इसे सिद्ध कीजिए।

(State Heine-Borel theorem and prove it.)

उत्तर P.No. 40, प्रमेय 12

प्र.15 (i) निम्न फलन α के किस मान के लिये बिन्दु $(0, 0)$ पर संतत है?

(For what value of α , the following function is continuous at $(0, 0)$.)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

उत्तर P.No. 151, Q.No. 5

(ii) बताइये कि निम्न फलन पर रोल प्रमेय लागू होगी या नहीं और किस प्रकार?

(check whether the following function holds Rolle's theorem or not, how?)

उत्तर P.N. 137, उदाहरण 2

प्र.16 सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन R में एक छद्म दूरीक है परन्तु दूरीक नहीं है।

(Prove that the following function is Pseudo-metric on R but metric.)

$$d(x, y) = |x^2 - y^2|, \forall x, y \in R$$

उत्तर P.No. 295, Q.No. 2

प्र.17 (i) विवृत समुच्चयों का स्वेच्छ संघ एक विवृत समुच्चय होता है। सिद्ध कीजिए।

(Arbitrary union of open sets is again open. Prove it.)

(ii) विवृत समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत समुच्चय होता है। सिद्ध कीजिए।

(Every finite intersection of open sets is again open. Prove it.)

उत्तर P.N. 33 प्रमेय 3

प्र.18 कोशी के सामान्य अभिसरण के सिद्धान्त का कथन कर इसे सिद्ध कीजिये।

(State Cauchy's General Principle of convergence and prove it.)

उत्तर P.No. 77, 4.6

प्र.19 निम्न श्रेणी के एक समान अभिसारी होने का परीक्षण कीजिए।

(Test the following series for uniform converge)

$$\sum \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right]$$

उत्तर P.No. 229, उदाहरण 11

प्र.20 प्रदर्शित कीजिए कि $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, $\forall x, y \in R$, R में एक दूरीक है।

(Show that $d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, $\forall x, y \in R$ is a metric on R)

उत्तर P.No. 295, Q.No. 2

प्र.21 सिद्ध कीजिए कि क्रमित क्षेत्र F अनन्त क्षेत्र होता है यदि $a, b \in F$ तो सिद्ध करो

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$$

(Prove that ordered field F is infinite field and if $a, b \in F$, then prove that

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy$$

उत्तर P.N. 9 उदाहरण 1 व 2

प्र.22 सिद्ध करो कि R का अरिक्त उपसमुच्चय A सम्बद्ध होता है यदि और केवल यदि यह एक अन्तराल है?

(Prove that a non-void subset A of R is connected if and only if it is an interval.)

उत्तर P.No. 42, प्रमेय - 13

प्र.23 द्वितीय मध्यमान प्रमेय का उपयोग कर सिद्ध कीजिये कि

Using second mean value theorem, prove that

(i) $\frac{1}{3\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx < \frac{1}{3}$

उत्तर :- P.No. 203 उदाहरण 4

(ii) $\frac{\pi^3}{15} < \int_0^\pi \frac{x^2}{3+2\cos x} dx < \frac{\pi^3}{3}$

उत्तर :- P.No. 204 उदाहरण 5

प्र.24 प्रदर्शित कीजिये कि निम्न फलन R में दूरीक है?

(Show that the following function is metric on R)

$$d(x, y) = \text{Minimum} \{2, |x-y|\} \quad \forall x, y \in R$$

उत्तर P.No. 295, Q.No. 5

प्र.25 सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।
(Prove that the set of Q rational numbers is not complete ordered field.)

उत्तर P.N. 16 प्रमेय 1.3

प्र.26 एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसारी होती है यदि और केवल यदि अनुक्रम परिबद्ध हो तथा उस स्थिति में $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}$. सिद्ध कीजिए।
(A monotonically increasing sequence $\{x_n\}$ is convergent iff it is bounded and $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup \{x_n\}$. Prove it.)

उत्तर P.No. 55, प्रमेय – 3.5

प्र.27 सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle f_n \rangle$, जहाँ $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^4 x^2}$, R पर एक समान अभिसारी नहीं है।

(Prove that the sequence $\langle f_n \rangle$, where $f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^4 x^2}$ is not uniformly convergent on R .)

उत्तर P.No. 221 उदाहरण 4

प्र.28 निम्न श्रेणी के एक समान अभिसरण होने का परीक्षण कीजिये।
(Test the following series for uniform convergence.)

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}, \forall x \geq 0$$

उत्तर P.No. 232, उदाहरण 14