Program Name B.Sc./B.A. (Mathematics)
B.Sc. /B.A. - Part II
Paper Code – MT- 04 (Real Analysis &Metric space)
Section – A
(Very Short Answer Questions अति लघु ऊत्तर वाले प्रश्न)
प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है Each Question Carries 2 Marks

प्र.1 वास्तविक संख्याओं के सघनता गुणधर्म को परिभाषित कीजिये।

(Define denseness property of real numbers.)

उत्तर किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त वास्तविक संख्यायें परिमेय व अपरिमेय संख्याएँ विद्यमान होती है। इसे वास्तविक संख्याओं का सघनता गुणधर्म कहते हैं।

(There are infinite real numbers as rational and irrational between any two real numbers. This property of real numbers is known as denseness property of real numbers.)

प्र.2 उच्चक को परिभाषित कीजिये।

(Define supremum.)

उत्तर ऊपर से परिबद्ध समुच्चय S के उपरि-परिबंधों के समुच्चय का न्यूनतम अवयव, समुच्चय S का उच्चक कहलाता है।

(The least element of set of all upper bounds of set S, is called supremum.)

प्र.3 अनुक्रम $\{(-1)^n.n; n \in N\}$ की सीमा ज्ञात कीजिये, यदि इसका अस्तित्व है तो।

(Find the limit of the sequence $\{(-1)^n.n; n \in N\}$ if exists.)

उत्तर हाँ (Since) $\{(-1)^n.n; n \in N\} = \{-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5, ...\}$

अत: (so), $\underset{n\to\infty}{Lim}(-1)^n = \pm\infty$

i.e. limit doesn't exist.

(सीमा अस्त्वि में नहीं है।)

प्र.4 फलन $f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x = 0 \\ \sin\dfrac{1}{x} & ;\ x \neq 0 \end{cases}$ में $x = 0$ पर किस प्रकार का असांतत्य है? व क्यों?

(Which type of discontinuity is present in the function and $f(x) = \begin{cases} 0 & ;\ x = 0 \\ \sin\dfrac{1}{x} & ;\ x \neq 0 \end{cases}$ why?)

उत्तर चूँकि $\underset{x\to 0^-}{Lim} f(x)$ व $\underset{x\to 0^+}{Lim} f(x)$ दोनों का अस्तित्व नहीं है क्योंकि उपरोक्त सीमायें -1 व 1 के मध्य दोलनी है। फलत: $x = 0$ फलन पर द्वितीय प्रकार का असांतत्य है।

(There is second type of discontinuity as both $\underset{x\to 0^-}{Lim} f(x)$ and $\underset{x\to 0^+}{Lim} f(x)$ doesn't exist, since both these limits oscilates between -1 and 1.)

प्र.5 रीमान समाकलनीयता को परिभाषित कीजिए।

(Define Reimann integrability.)

उत्तर माना फलन f, संवृत अन्तराल $[a, b]$ में परिबद्ध है। तब फलन f, $[a, b]$ पर रीमान समाकलनीय कहलाता है। यदि और केवल यदि

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx$$

[Let function f is bounded in closed interval, then function f is said to be Reimann integrable iff

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx]$$

प्र.6 दूरीक समष्टि की परिभाषा लिखिए।

(Define metric spaces.)

उत्तर माना कि x एक अरिक्त समुच्चय है। एक फलन $d : x \times x \to R$ जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, x पर एक दूरिक फलन कहलाता है यदि निम्न अभिगृहीतों को संतुष्ट करता हो।

Let x be a non-void set, then a function $d : x \times x \to R$ is said to be metric function if it satisfies the following properties:

(i) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) \leq (x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$

(the, set x with metric d i.e. (x, d) is called metric space)

तब, समुच्चय x दूरीक फलन d के साथ अर्थात् (x, d) दूरीक समष्टि कहलाता है।

प्र.7 किसी समुच्चय के सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिये।

(Define Limit point of a set)

उत्तर माना (x, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $A \subset X$। एक बिन्दु $x \in X$ समुच्चय A का सीमा बिन्दु कहलाता है। यदि प्रत्येक विवृत गोला $S(x, r)$ जिसका केन्द्र x व त्रिज्या $r > 0$ हो, x के अलावा समुच्चय A का कम से कम एक बिन्दु और समाहित करे।

[Let (x, d) be a metric space and $A \subset X$. A point $x \in X$ is said to be limit point of set A if every sphere $S(x, r)$ centred at x and with radius $r > 0$ contains atleast one element of A instead of x.]

प्र.8 निम्नक को परिभाषित कीजिये।

(Define infimum of a set.)

उत्तर नीचे से परिबद्ध समुच्चय S के निम्न परिबंधों के समुच्चय का अधिकतम (उच्चतम) अवयव, समुच्चय S का निम्नक कहलाता है।

(The maximum value of set of all lower bouns of set S, is called infimum of set S.)

प्र.9 परिबद्ध समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

(Define bounded set.)

उत्तर क्रमित क्षेत्र F का अरिक्त समुच्चय S परिबद्ध कहलाता है। यदि S के दोनों उपरि व निम्न परिबंध F में विद्यमान हो, अर्थात

$$\exists k_1, k_2 \in F, \text{ s.t. } k_2 \leq x \leq k_1, \ \forall x \in S$$

(Any non-void subset S of ordered field F is said to be bounded if there exists both lower and upper bounds. i.e.

$$\exists k_1, k_2 \in F \text{, s.t. } k_2 \le x \le k_1,\ \forall x \in S$$

प्र.10 अपसारी अनुक्रम को परिभाषित कीजिये।

(Define divergent sequence of real number.)

उत्तर एक अनुक्रम अपसारी कहलाती है यदि इसकी सीमा परिमित नहीं हो अर्थात्

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, x_n = \infty \text{ or } -\infty$$

(A sequence is said to be divergent if its limit is not finit i.e.

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, x_n = \infty \text{ or } -\infty$$

प्र.11 डार्बू प्रमेय का कथन लिखिए।

(Write the statements of Darboux theorem.)

उत्तर यदि फलन f, संवृत अन्तराल $[a, b]$ में परिबद्ध है तब प्रत्येक पूर्ण निर्धारित सूक्ष्म से सूक्ष्मतर राशि $\in > 0$ के लिये एक राशि $\delta > 0$ इस प्रकार विद्यमान होती है कि सभी $P \in P[a, b]$ जहाँ $\|P\| < \delta$ के लिये

(i) $U(p, f) < \int_a^{\bar{b}} f(x)dx + \in$

(ii) $L(p, f) > \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx - \in$

If function is bounded in closed interval $[a, b]$ then $\exists a\ \delta > 0$ s.t. $\forall P \in P[a, b]$, where $\|P\| < \delta$

(i) $U(p, f) < \int_a^{\bar{b}} f(x)dx + \in$

(ii) $L(p, f) > \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx - \in$

प्र.12 फलनों की अनुक्रम का बिन्दुश: अभिसरण को परिभाषित कीजिये।

(Define pointwise convergence of sequence of functions.)

उत्तर माना $< f_n >$ वास्तविक संख्याओं के किसी समुच्चय $E \subset R$ पर परिभाषित फलनों की कोई अनुक्रम है। तब यदि प्रत्येक बिन्दु $c \in E$ के लिये वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम $< f_n(c) >$, राशि $f(c)$ को अभिसृत हो तो इसे बिन्दुश: अभिसरण कहते हैं।

[Let $< f_n >$ be a sequence of functions defined on set $E \subset R$, then if $\forall c \in E$, $\exists f(c)$ s.t. $f_n(x) \to f(c),\ \forall c \in E$]

प्र.13 आन्तरिक बिन्दु को परिभाषित कीजिये।

(Define interior point of a set.)

उत्तर माना (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $A \subset X$, एक बिन्दु $x \in A$ समुच्चय A का आन्तरिक बिन्दु कहलाता है यदि एक विवृत गोला $S(x, r)$ जिसका केन्द x व $r > 0$ त्रिज्या विद्यमान हो, ताकि $S(x, r)$ $S(x, r) \subset A$।

(Let (X, d) be a metric space and $A \subset X$, $x \in A$, is said to be interior point of A if $\exists$ and open sphere $S(x, r)$ with centre x and radius $r > 0$. s.t. $S(x, r) \subset A$)

प्र.14 पूर्ण दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिये।

(Define the complete metric space)

उत्तर एक दूरीक समष्टि X पूर्ण दूरीक समष्टि कहलाती है यदि X का प्रत्येक कोशी अनुक्रम X में एक बिन्दु को अभिसृत होता है।

[A metric space (X,d) is said to be complete if every Cauchy sequence (X,d) in converges to a point in X.]

प्र.15 धनात्मक वर्ग को परिभाषित कीजिये।

(Define positive class.)

उत्तर क्षेत्र F का एक अरिक्त उपसमुच्चय P, धनात्मक वर्ग कहलाता है यदि

(i) $a,b \in P \Rightarrow a+b \in P$ और $a,b \in P$ एवं

(ii) $0 \neq a \in F$ तब या तो $a \in P$ या $-a \in P$

(A non-void subset P of field F, is called positive class if)

(i) $a,b \in P \Rightarrow a+b \in P$ and $a,b \in P$ and

(ii) $0 \neq a \in F$ then either $a \in P$ or $-a \in P$

प्र.16 अभिसारी अनुक्रम को परिभाषित कीजिये।

(Define convergn sequence of real numbers.)

उत्तर एक अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसारी कहलाती है यदि इसकी सीमा परिमित होती है। अर्थात्

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, x_n = l = \text{परिमित राशि}$$

(A sequence is said to be convergent if its limt is finit i.e.

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\, x_n = l = \text{finite value}$$

प्र.17 क्या फलन $f(x)=|x|,\ \forall x \in R$ सर्वत्र अवकलनीय है? यदि नहीं तो किस बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

(Is the function $f(x)=|x|$ is differentiable everywhere, if not, at which point $f(x)$ is not differentiable.)

प्र.18 द्विचर फलन $f(x,y)$ के किसी बिन्दु (x_0,y_0) पर सांतत्य को परिभाषित कीजिये।

(Define the continuity of function of two variable at any point (x_0,y_0).)

उत्तर फलन $f(x,y)$ बिन्दु (x_0,y_0) पर संतत् होता है यदि प्रत्येक $\in > 0$ के संगत $\delta > 0$ इस प्रकार विद्यमान हो कि

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \in \text{ जबकि } |x-x_0| < \delta,\ |y-y_0| < \delta$$

(Function $f(x,y)$ is said to be continuous at (x_0,y_0) if $\forall \in > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t.

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| < \in \text{when } |x-x_0| < \delta,\ |y-y_0| < \delta)$$

प्र.19 समाकलन गणित की मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिये।

(Write the statement of fundamental theorem of integral calculus.)

उत्तर यदि फलन f अन्तराल $[a,\, b]$ पर रीमान समाकलनीय है तथा यदि $[a,\, b]$ पर कोई अवकलनीय फलन $\phi(x)$ इस प्रकार है कि

$$\phi'(x) = f(x),\ \ a \le x \le b \text{ तब}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

[If function f is Reimann-integrable and $\phi(x)$)

is a differentiable on $[a,\, b]$ so that

$$\phi'(x) = f(x),\ a \le x \le b \text{, then}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)]$$

प्र.20 फलनों का अनुक्रम का एकसमान अभिसरण को परिभाषित कीजिये।

(Define uniform convergence of sequence of functions..)

उत्तर समुच्चय $E \subset R$ पर परिभाषित फलनों की अनुक्रम $< f_n >, E$ पर परिभाषित किसी फलन f को एकसमान रूप से अभिसृत होती है यदि दी हुई सूक्ष्म राशि $\in > 0$ के लिये एक धनात्मक पूर्णांक $n_0 \in N$ सदैव इस प्रकार है कि सभी बिन्दुओं $x \in E$ के लिये

$$|f_n(x) - f(x)| < \in, \qquad \forall n \geq n_0$$

The sequence $< f_n >$ defined on $E \subset R$, is said to be uniformly convergent if for given $\in > 0$ s.t.

$$|f_n(x) - f(x)| < \in, \qquad \forall n \geq n_0, \forall x \in E\,]$$

प्र.21 सम्बद्ध समष्टि को परिभाषित कीजिये।

(Define connected spaces)

उत्तर दूरीक समष्टि X असम्बद्ध कहलाती है यदि X के दो अरिक्त उपसमुच्चय A व B इस प्रकार हो कि

$$X = A \bigcup B \text{ व } A \bigcap B = \phi$$

दूरीक समष्टि X सम्बद्ध कहलाती है। यदि वह असम्बद्ध नहीं हो।

[Metric space X is said to be disconnected if there exists two subsets. A and B of X such that

$$X = A \bigcup B \text{ And } A \bigcap B = \phi$$

Metric space X is said to be connected if it is not disconnected.]

प्र.22 समुच्चय $S = \{x \mid x \in I, x^2 \leq 16\}$ का उच्चक बताइये।

(What is the supremum of the set $S = \{x \mid x \in I, x^2 \leq 16\}$.)

उत्तर 4

प्र.23 बताइये कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R सम्बद्ध या नहीं?

(Is the set of real numbers connected or not?)

उत्तर हाँ (Yes)

प्र.24 अनुक्रम $< x_n >$, जहाँ $x_n = \frac{1}{2}$ की सीमा बताइये।

(What is limit of the sequence $x_n = \frac{1}{2}$, where $x_n = \frac{1}{2}$)

उत्तर $\frac{1}{2}$

प्र.25 क्या निम्न फलन $x = 2$ पर संतत है?

(Is the following function is continuous at $x = 2$?)

उत्तर हाँ संतत है। (yes, it is continuous)

प्र.26 फलनों की अनुक्रम $< f_n >$, जहाँ $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $\forall x \in [0, k]$, $k > 0$ के लिये $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ज्ञात कीजिये।

(Find $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ for the sequence of functions $< f_n >$ where $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $\forall x \in [0, k]$, $k > 0$.)

उत्तर 0

प्र.27 दो समुच्चयों A व B के बीच की दूरी को परिभाषित कीजिए।

(Define the distance between two sets A and B.)

उत्तर $d\ (A,B)$ निम्नक (infimum) $\{d(a,b) | a \in A, b \in B\}$

प्र.28 क्या ϕ व X दोनों ही विवृत समुच्चय हैं ?

(Is the sets ϕ and X are open?)

उत्तर हाँ

प्र.29 समुच्चय $S = \{x : x^2 \leq 16, x \in I\}$ का निम्नक बताइये।

(What is the infimum of the set $S = \{x : x^2 \leq 16, x \in I\}$.)

उत्तर -4

प्र.30 क्या वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R संहत समुच्चय है?

(Is the set of real numbers is compact?)

उत्तर नहीं (No)

प्र.31 एक अपरिबद्ध अनुक्रम का उदाहरण दीजिए।

(Give an example of unbounded sequence.)

उत्तर $< n : n \in N >$

प्र.32 कोशी अनुक्रम का कथन लिखिए।

(Write the statement of Cauchy sequence.)

उत्तर एक अनुक्रम $\{x_n\}$ कोशी अनुक्रम कहलाता है, यदि प्रत्येक $\in > 0$ के संगत एक ऐसा धनात्मक पूर्णांक n_0 इस प्रकार विद्यमान हो कि $|x_n - x_m| < \in$, $\forall\ n \geq n_0$, $m \geq n_0$

(A sequence $\{x_n\}$ is said to be Cauchy sequence if $\forall$ for given $\in > 0$, a positive integer n_0 such that $|x_n - x_m| < \in$, $\forall\ n \geq n_0$, $m \geq n_0$)

प्र.33 फलन की अनुक्रम $< f_n >$, जहाँ $f_n(x) = x^n$, $\forall x \in [0, 1]$ के लिये $\underset{n\to\infty}{Lim} f_n$ का मान ज्ञात कीजिये।

(Find $\underset{n\to\infty}{Lim} f_n$ for the sequence of function $< f_n >$, where $f_n(x) = x^n$, $\forall x \in [0, 1]$.)

उत्तर $f_n(x) = \underset{n\to\infty}{Lim} f_n(x) = \begin{cases} 0 \quad , & 0 \leq x < 1 \\ 1 \quad , & x = 1 \end{cases}$

प्र.34 छद्म-दूरीक को परिभाषित कीजिये।

(Define the Pseudo-Metric.)

उत्तर माना कि x एक अरिक्त समुच्चय है। एक फलन $d : x \times x \to R$ एक छद्म दूरीक कहलाता है यदि

(Let x be a non-void set. A function $d : x \times x \to R$ is said to be Pseudo-metric if)

(i) $d(x, y) \geq 0$, $\forall\ x, y \in X$

(ii) $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\ x, y \in X$

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall\ x, y, z \in X$

प्र.35 किसी समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

(Define neighbourhood of a set)

उत्तर माना (X,d) एक दूरीक—समष्टि है तथा $\phi \neq A \subset X$ । X का एक उपसमुच्चय N, समुच्चय A का प्रतिवेश कहलाता है यदि एक विवृत समुच्चय $G \subset X$ का अस्तित्व हो ताकि

$$A \subset G \subset N$$

(Let (X,d) be a metric space and $\phi \neq A \subset X$, then a N subset X of is said to be neighbourhood of the set A if there exists on open set $G \subset X$ such that $A \subset G \subset N$)

प्र.36 क्या समुच्चय $S = \{x : x^2 \leq 16, x \in I\}$ परिबद्ध है?

(Is the set $S = \{x : x^2 \leq 16, x \in I\}$ bounded?)

उत्तर हाँ

प्र.37 समुच्चय $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ का सीमा बिन्दु बताइये।

(What is the limit point of the set $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$)

उत्तर 0

प्र.38 अनुक्रम $\left\{\frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right\}$ किस बिन्दु को अभिसृत होती है?

(What is the point where the sequence $\left\{\frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right\}$ converges?)

उत्तर 2

प्र.39 निम्न फलन किस बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है?

(What is the point at which the following function is not differentiable?)

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & : \quad x \geq 2 \\ 6-x & : \quad x < 2 \end{cases}$$

उत्तर $x = 2$ पर (At $x = 2$)

प्र.40 फलनों की अनुक्रम $< f_n >$,जहाँ $f_n(x) = nx(1-x^2)^n,\ \forall x \in [0, 1]$ किस बिन्दु को अभिसृत होती है?

(What is the point of pointwise convergence of the sequence $< f_n >$ of function, where $f_n(x) = nx(1-x^2)^n,\ \forall x \in [0, 1]$.)

उत्तर 0

प्र.41 क्या फलनों की श्रेणी $\sum \frac{\sin x}{n^2}$, समुच्चय R पर एक समान अभिसारी है?

(Is the series of function $\sum \frac{\sin x}{n^2}$ is uniformly convergent on R.)

उत्तर हाँ (Yes)

प्र.42 परिबद्ध दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिये।

(Define bounded metric space.)

उत्तर माना (X,d) एक दूरीक—समष्टि है। तब X परिबद्ध दूरीक समष्टि कहलाता है। यदि और केवल यदि एक धनात्मक वास्तविक संख्या k विद्यमान हो ताकि $d(x, y) \leq k$, $\forall x, y \in X$

(Let (X,d) be a metric space, then X is said to be bounded metric space if and only if there exists a positive real number k such that $d(x,y) \le k$, $\forall x, y \in X$.)

प्र.43 समुच्चय $S = \left\{ x : x = \dfrac{1}{2n} : n \in I, n \ne 0 \right\}$ का निम्नक बताइये।

(What is the infimum of the set $S = \left\{ x : x = \dfrac{1}{2n} : n \in I, n \ne 0 \right\}$.)

उत्तर $-\dfrac{1}{2}$

प्र.44 बाल्जनो वाइस्ट्रास प्रमेय का कथन कीजिये।

(State the Bolzano-Weierstrass theorem.)

उत्तर प्रत्येक अपरिमित परिबद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।

(Every infinite bounded set has atleast one limit point.)

प्र.45 एक दिष्ट वर्धमान अनुक्रम $\{x_n\}$ कब अभिसारी होता है?

(When does a monotonically increasing sequence $\{x_n\}$ converge?)

उत्तर जब परिबद्ध हो। (When the sequence is bounded)

प्र.46 फलन $f(x) = |x| + |x-1|$, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R के किन बिन्दु पर संतत है?

(At what points of the set R of real numbers is the function $f(x) = |x| + |x-1|$ continuous?)

उत्तर R के सभी बिन्दुओं पर (for all real numbers)

प्र.47 $\underset{n \leftarrow \infty}{Lim}\, f_n(x)$ ज्ञात कीजिये जहाँ $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $\forall\ x \in [0, 1]$.

(Find $\underset{n \leftarrow \infty}{Lim}\, f_n(x)$ where $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $\forall\ x \in [0, 1]$.)

प्र.48 दूरीक समष्टि (X,d) जहाँ A, X कोई अरिक्त उपसमुच्चय है, के लिये समुच्चय A का व्यास परिभाषित कीजिये।

(Define the diameter of the set A, where A is the non-void subset of metric space (X,d).)

उत्तर $\delta(A) =$ उच्चक (supermum) $\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$

प्र.49 क्या समुच्चय $A = [2, 3]$ बिन्दु 2 का प्रतिवेश हैं?

(Is the set $A = [2, 3]$ neighbourhood of point 2.)

उत्तर नहीं (No)

प्र.50 द्विचर फलन $f(x,y)$ के किसी बिन्दु (x_0, y_0) पर सांतत्य को परिभाषित कीजिये।

(Define the continuity of function of two variable at any point (x_0, y_0).)

उत्तर फलन $f(x,y)$ बिन्दु (x_0, y_0) पर संतत् होता है यदि प्रत्येक $\in > 0$ के संगत $\delta > 0$ इस प्रकार विद्यमान हो कि

$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \in$ जबकि $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$

(Function $f(x,y)$ is said to be continuous at (x_0, y_0) if $\forall \in > 0$, $\exists \delta > 0$ s.t.

$|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \in$ when $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$)