

Program Name B.Sc. / B.A. (Mathematics)
B.Sc. / B.A. Part I
Paper Code – MT- 02 (Calculus & Differential Equations)
Section – C

(Long Answer Questions दीर्घ उत्तर वाले प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न 14 अंक का है Each Question Carries 14 Marks

Q.1 (i) The ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ revolves round its major axis. Find the surface area of the prolate spheroid generated.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को दीर्घ-अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित गोलाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 254]

(ii) Find the area bounded by curve $y^2(a-x) = x^3$ and its asymptotes.

वक्र $y^2(a-x) = x^3$ एवं इसकी अनन्तस्पर्शी के द्वारा घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 206]

Q.2 (i) Find the envelope of the circles whose diameters are double ordinates of the parabola $y^2 = 4ax$.

उन वृत्तों का अन्वालोप ज्ञात कीजिये जिनके व्यास परवलय $y^2 = 4ax$ की द्विगुण कोटियाँ हैं।

Ans. [MT-02, Page 188]

(ii) Integrate $r \sin \theta$ over the area of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ about the initial line.

हृदयाम $r = a(1 + \cos \theta)$ के प्रारम्भिक रेखा से ऊपर वाले क्षेत्र पर $r \sin \theta$ का समाकलन कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 281]

Q.3 (i) Solve the following differential equation:

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए:

$$(3xy - 2ay^2)dx + (x^2 - 2axy)dy = 0$$

Ans. [MT-02, Page 351]

(ii) Prove that $\int_n^{\infty} \int_{1-n}^{\infty} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

सिद्ध करो कि $\int_n^{\infty} \int_{1-n}^{\infty} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

Ans. [MT-02, Page 311]

Q.4 (i) Write statement and proof of Dirichlet's Integral.

डिरिचलेट समाकल को लिखिए तथा सत्यापित कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 298]

(ii) Change the order of integration in the following integral:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin r x \, dx \, dy$$

and find the value of integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin r x}{x} dx$$

निम्न समाकल

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin r x dx dy \text{ में क्रम परिवर्तन से}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin r x}{x} dx \text{ का मान ज्ञात कीजिए}$$

Ans. [MT-02, Page 287]

Q.5 (i) Find the envelop of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, whose axis a and b relate as $a+b=c$.

दीर्घवृत्तों $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जिनके अक्ष a तथा b में निम्न सम्बन्ध है, $a+b=c$

(ii) Find the asymptotes of the following curve

वक्र की अनन्त स्पर्शियों को ज्ञात कीजिए।

$$y^2(x-b) = x^3 + a^3$$

Ans. [MT-02, Page 194, 150]

Q.6 (i) Prove that the maximum value of function $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ is $e^{1/e}$.

सिद्ध कीजिए कि $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ का उच्चिष्ठ मान $e^{1/e}$ है।

(ii) Write the statement and proof of Euler's theorem on homogeneous function.

समघात फलनों पर आयलर की प्रमेय लिखिए व उसे सिद्ध कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 130, 111]

Q.7 (i) Trace the following curve

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए।

$$ay^2 = x(x-a)^2$$

(ii) Prove that the area between the parabole $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4by$ is $\frac{16}{3}ab$.

सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2 = 4ax$ के $x^2 = 4by$ मध्य का क्षेत्रफल $\frac{16}{3}ab$ है।

Ans. [MT-02, Page 170, 217]

Q.8 (i) Change the order of integration find the value of the following integral.

निम्न समीकरण का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dx dy$$

(ii) Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{2}{n}} \sqrt{\frac{3}{n}} \dots \sqrt{\frac{(n-1)}{n}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Where $n > 1$, and $n \in N$.

जहाँ तथा

Ans. [MT-02, Page 286, 314]

Q.9 (i) Transform carterim equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ into polar coordinates.

कान्तीय समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ का ध्रुवीय रूपान्तरण कीजिये।

Ans. [MT-02, Page 118]

(ii) Find the volume in the first octant bounded by the cylinders $x^2 + y^2 = a^2$ and $x^2 + z^2 = a^2$.

बेलनों $x^2 + y^2 = a^2$ तथा $x^2 + z^2 = a^2$ से घिरे हुए प्रथम अष्टा शंक में को ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 304]

Q.10 (i) Find the intrinsic equation of the asteroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, when s is measured :

(a) from the cusp on the axis of x .

(b) from the vertex.

एस्टाइड का $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ नैज समीकरण ज्ञात कीजिये जबकि s नापा गया हो

(a) x -अक्ष पर कस्प से

(b) शीर्ष से

Ans. [MT-02, Page 234]

(ii) Prove that $\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} 2m$ where $m > 0$

सिद्ध करो कि $\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} 2m$

जहाँ $m > 0$

Ans. [MT-02, Page 312]

Q.11 (i) Find the envelop of family of curve $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ while

(i) $a^n + b^n = c^n$ (ii) $ab = c^2$

वक्र कुल $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जबकि

(i) $a^n + b^n = c^n$ (ii) $ab = c^2$

Ans. [MT-02, Page 197]

(ii) Solve the following Differential Equation

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिये:

$$xdx + ydy = a^2 \left(\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \right)$$

Ans. [MT-02, Page 346]

Q.12 (i) Prove that (सिद्ध कीजिये)

$$(a) \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx x^{n-1} dx = \frac{\sqrt{n}}{(a^2 + b^2)^{n/2}} \sin n\theta$$

$$(b) \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx x^{n-1} dx = \frac{\sqrt{n}}{(a^2 + b^2)^{n/2}} \cos n\theta$$

Where $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$

(ii) Trace the following curve :

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए:

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

Ans. [MT-02, Page 316, 169]

Q.13 (i) Find the whole length of the curve $x^2(a^2 - x^2) = 8a^2y^2$.

वक्र $x^2(a^2 - x^2) = 8a^2y^2$ की सम्पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(ii) Find the whole area of the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 229, 205]

Q.14 (i) One corner of a long rectangular paper of width 1 meter is folded so as to reach the opposite edge of the paper. Find the minimum length of the crease.

एक लम्बे आयताकार कागज की चौड़ाई 1 मीटर है। इसके एक कोने को इतना मोड़ा गया कि वह कागज के कोर तक पहुँच जाए। अब इस प्रकार बनने वाले सिलवट की न्यूनतम लम्बाई क्या होगी।

Ans. [MT-02, Page 136]

(ii) Verification the Euler's theorem for the function

$$f(x, y) = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$$

फलन $f(x, y) = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$ के लिये आयलर के प्रमेय का सत्यापन कीजिये।

Ans. [MT-02, Page 112]

Q.15 (i) Prove that for the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\rho = \frac{a^2b^2}{\rho^3}$, where ρ is the centre upon the tangent at (x, y) and ρ is a radius of curvature at the point (x, y) .

सिद्ध करो कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिये $\rho = \frac{a^2 b^2}{\rho^3}$ जहाँ ρ किसी बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या है व ρ

बिन्दु (x, y) पर खींची गई स्पर्श रेखा पर केन्द्र से डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

Ans. [MT-02, Page 92]

Q.16 (i) Discuss convergence and absolute convergence of the following series:

निम्न श्रेणी के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$$

Ans. [MT-02, Page 30]

(ii) Find the perimeter of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$. Also show that the upper half arc of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ is bisected by the line $\theta = \frac{1}{3}\pi$.

कार्डिआयड $r = a(1 + \cos \theta)$ का परिमाण ज्ञात कीजिये एवं प्रदर्शित कीजिए कि इसका ऊपरी अर्धचाप रेखा $\theta = \frac{1}{3}\pi$

से समद्विभाजित होता है।

Ans. [MT-02, Page 230]

Q.17 (i) Trace the following curve

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए।

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

Ans. [MT-02, Page 172]

(ii) Find the area of a loop of the curve $r = a \sin 3\theta$

वक्र $r = a \sin 3\theta$ के एक लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 222]

Q.18 Solve the following differential equations.

निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$ 5

(ii) $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$ 5

(iii) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$ 4½

Ans. [MT-02, Page 339, 343, 3347]

Q.19 (i) If $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ then find the Maximum or Minimum value $x^2 + y^2$.

यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ हो तो $x^2 + y^2$ का अधिकतम व न्यूनतम मान ज्ञात करो।

(ii) If (यदि) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$ then show that तो प्रदर्शित कीजिए कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n(n+1)(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2-1}$$

Ans. [MT-02, Page 139, 106]

Q.20 (i) Find the Pedal equation of the ellipse $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ ($e < 1$)

दीर्घवृत्त $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ ($e < 1$) का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) Prove that the radius of curvature of the curve $x^2 y = a(x^2 + y^2)$ at the point $(-2a, 2a)$ is $2a$.

सिद्ध करो कि $x^2 y = a(x^2 + y^2)$ वक्र के बिन्दु $(-2a, 2a)$ पर वक्रता त्रिज्या $2a$ है।

Ans. [MT-02, Page 73, 91]

Q.21 (i) Solve the following Differential Equation.

निम्न अवकल समीकरण हल कीजिए।

$$y^2 dx + (xy + x^2) dy = 0$$

(ii) Evaluate the following integral by changing to polar coordinates:

निम्न द्विसमाकल को ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{2a} \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

Ans. [MT-02, Page 331, 284]

Q.22 (i) Prove that (सिद्ध कीजिये कि)

$$\frac{1}{n!} \frac{2}{n!} \frac{3}{n!} \dots \frac{(n-1)}{n!} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Where $n > 1$ and $n \in N$

जहाँ $n > 1$ व $n \in N$

(ii) Trace the following curve:

निम्न वक्र का अनुग्रेखण कीजिए:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

Ans. [MT-02, Page 314, 173]

Q.23 (i) Prove that if $x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$ and $y = \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha$ then

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Where α is constant.

सिद्ध करो कि यदि $x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$ व $y = \xi \sin \alpha - \eta \cos \alpha$ हो तो

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

जबकि α एक अचर राशि है।

Ans. [MT-02, Page 120]

(ii) Find radius of curvature, centre of curvature and equation of circle of curvature for the curve $y = x^3 = 2x^2 + x + 1$ at the point $(0,1)$.

वक्र $y = x^3 = 2x^2 + x + 1$ के बिन्दु $(0,1)$ के लिये वक्रता त्रिज्या, वक्रता केन्द्र तथा वक्रता वृत्त का समीकरण ज्ञात करो।

Ans. [MT-02, Page 97]

Q.24 (i) Find the pedal equation for the parabola $y^2 = 4a(x+a)$

परवलय $y^2 = 4a(x+a)$ का पदिक समीकरण ज्ञात करो।

Ans. [MT-02, Page 71]

(ii) Solve the following differential equation.

निम्न अवकल समीकरण हल कीजिए।

$$\left[x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right] y = \left[y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right] x \frac{dy}{dx}$$

Q.25 (i) Solve the following Differential equation.

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$$

(ii) Solve (हल कीजिए)

$$(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$$

Ans. [MT-02, Page 336, 350]

Q.27 (i) Find the equation of the curve whose intrinsic equation $s = c \tan \psi$ while $\psi = 0$ on $x=0$ and $y=c$ is given.

उस वक्र का समीकरण प्राप्त कीजिए जिसका नैज समीकरण $s = c \tan \psi$ जबकि $\psi = 0$ पर $x=0$ तथा $y=c$ दिया हुआ है।

(ii) Find the area of the cardioids $r = a(1 + \cos \theta)$ when curve is symmetric about the initial line.

कार्डिआइड $r = a(1 + \cos \theta)$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जब वक्र प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष सममित है।

Ans. [MT-02, Page 236, 220]

Q.28 (i) Show that the minimum value of function $u(x, y) = xy + a^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ is $3a^2$.

प्रदर्शित कीजिये कि फलन $u(x, y) = xy + a^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ का निम्निष्ठ मान $3a^2$ है।

(ii) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ then prove that

यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = -\frac{9}{(x+y+z)^2}$$

Ans. [MT-02, Page 133, 107]

Q.29 (i) Find the pedal equation of the curve $r = a(1 + \cos \theta)$

वक्र $r = a(1 + \cos \theta)$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) Show that the series $x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \dots$ is convergent if $x < 1$ and divergent if $x \geq 1$

प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \dots$ अभिसारी है यदि $x < 1$ तथा $x \geq 1$ अपसारी है यदि

Ans. [MT-02, Page 72,22]

UNMOU