

Program Name B.Sc. / B.A. (Mathematics)
B.Sc. / B.A. Part I
Paper Code – MT- 02 (Calculus & Differential Equations)
Section – B
(Short Answer Questions लघु उत्तर वाले प्रश्न)
प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है Each Question Carries 6 Marks

Q.1 Find the complete surface area of the solid generated by the revolution of the asteroid
 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (एस्ट्रायड) का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 205]

Q.2 From any point on the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ perpendicular's are drawn to the axis, and the feet of these perpendiculars are joined-show that the straight line thus formed always touches the curve $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के किसी बिन्दु से अक्षों पर लम्ब खींचे गये हैं और लम्ब पाद मिला दिये गये हैं। सिद्ध कीजिये कि इस

प्रकार प्राप्त रेखा, वक्र $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ को सदैव स्पर्श करती है।

Ans. [MT-02, Page 185]

Q.3 Find the Maximum or Minimum of the following function.
निम्न फलनों का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए।

$$\sin x + \cos 2x$$

Ans. [MT-02, Page 128]

Q.4 For curve $\frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$ find $\frac{ds}{d\theta}$.

वक्र $\frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$ के लिये $\frac{ds}{d\theta}$ ज्ञात कीजिये।

Ans. [MT-02, Page 64]

Q.5 A circular arc revolves about its chord. Find the area of the surface formed, if the radius of the arc is a and it subtends angle 2α at the centre.

एक वृत्तीय चाप अपनी जीवा के चारों ओर घूमता है। इस प्रकार जनित पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये, जहाँ वृत्त की त्रिज्या a तथा चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 2α है।

Ans. [MT-02, Page 259]

Q.6 Solve the following Differential Equation.

निम्न अवकल समीकरण हल कीजिए।

$$y(2xy + e^x)dx = e^x dy$$

Ans. [MT-02, Page 349]

Q.7 Find the value of
मान ज्ञात कीजिए

$$(i) \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)} \quad (ii) \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)}$$

Ans. [MT-02, Page 318]

Q.8 Find the value of the following triple Integral.
निम्न त्रि समाकलों का मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2/4} dx dy dz$$

Ans. [MT-02, Page 295]

Q.9 Test whether the following series is convergent or divergent
निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए।

$$\sqrt{n^2+1} - n$$

Ans. [MT-02, Page 12]

Q.10 Find $\frac{ds}{d\theta}$ for the curve $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ के लिए $\frac{ds}{d\theta}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 64]

Q.11 Find the angle between the radius vector and tangent line of the curve $\frac{2a}{r} = 1 - \cos \theta$ at the point (r, θ)

वक्र $\frac{2a}{r} = 1 - \cos \theta$ के किसी बिन्दु (r, θ) पर ध्रुवान्तर रेखा व स्पर्श रेखा के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 75]

Q.12 If $x^4 + y^4 = C$ then find the value of $\frac{dy}{dx}$?

यदि $x^4 + y^4 = C$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 122]

Q.13 Find the minimum value of $x^2 + y^2 + z^2$ while $x + y + z = 3a$.

$x^2 + y^2 + z^2$ का निम्नतम मान ज्ञात कीजिए, जबकि $x + y + z = 3a$

Ans. [MT-02, Page 138]

Q.14 Find the value of $\int_A xy(x+y) dx dy$, where region of integration bounded from the

parabola $y = x^2$ and line $y = x$.

मान ज्ञात कीजिए।

$\iint_A xy(x+y) dx dy$, जहाँ समाकलन का क्षेत्र A , परवलय $y = x^2$ तथा रेखा $y = x$ से परिबद्ध है।

Ans. [MT-02, Page 274]

Q.15 Find the value
मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x^6)} dx$$

Ans. [MT-02, Page 319]

Q.16 Solve the Differential Equation.

अवकल समीकरण हल कीजिए।

$$3e^x + axy dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$$

Ans. [MT-02, Page 328]

Q.17 If $u = F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ then by chain rule find the value of $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$.

यदि $u = F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ हो तो श्रृंखला नियम से $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 117]

Q.18 Find the envelope of a straight line drawn at right angles to the ends of the radii vectors of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$.

उन रेखाओं का अन्वालोप ज्ञात कीजिये जो कार्डिआइड $r = a(1 + \cos \theta)$ की ध्रुवान्तर रेखाओं के सिरो से उन पर समकोण बनाती हुई खींची जाये।

Ans. [MT-02, Page 189]

Q.19 Find the intrinsic equation of the equi-angular spiral $r = ar^{\theta \cot \alpha}$ where S is measured from the point $(a, 0)$.

समान कोणिक सर्पिल $r = ar^{\theta \cot \alpha}$ के लिए नैज समीकरण प्राप्त कीजिए, जहाँ S , के बिन्दु $(a, 0)$ से नापा गया है।

Ans. [MT-02, Page 236]

Q.20 Find the volume of the solid generated by revolving the lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ about the line $\theta = \frac{\pi}{2}$.

द्विपाशी $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ से जनित ठोस आकृति का आयतन ज्ञात कीजिए जब यह रेखा $\theta = \frac{\pi}{2}$ के परितः परिक्रमण करता हो।

Ans. [MT-02, Page 260]

Q.21 Solve the following Differential Equation.

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए।

$$\cos(x+y) dy = dx$$

Ans. [MT-02, Page 329]

Q.22 Show that the semi vertical angle of a cone of maximum volume and given slant height is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$.

सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और अधिकतम आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ होता है।

Ans. [MT-02, Page 134]

Q.23 For curve $\frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$ find $\frac{ds}{d\theta}$.

वक्र $\frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$ के लिये $\frac{ds}{d\theta}$ ज्ञात कीजिये।

Ans. [MT-02, Page 64]

Q.24 Test the convergence of series

$$1 + \frac{ab}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

Where x, a, b, c are all positive.

श्रेणी

$$1 + \frac{ab}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

जहाँ x, a, b, c सभी धनात्मक हैं।

Ans. [MT-02, Page 27]

Q.25 Show that for $f(x) = (3-x)e^{2x} - 4xe^x - x$ for $x=0$ it has neither a maximum nor a minimum value.

दर्शाइये कि $f(x) = (3-x)e^{2x} - 4xe^x - x$ के लिए $x=0$ पर न तो उच्चिष्ठ है न निम्नछि।

Ans. [MT-02, Page 129]

Q.26 If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$ then prove that

यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

Ans. [MT-02, Page 114]

Q.27 Find the envelope of the circles drawn upon the central radii of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ as diameters.

उन वृत्तों का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जो दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की ध्रुवान्तर रेखाओं को व्यास मानकर खींचे गये हैं।

Ans. [MT-02, Page 184]

Q.28 Test the convergence of the following series.

दी गई श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

$$x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \dots$$

Ans. [MT-02, Page 18]

Q.29 Show that the volume of the solid generated by the revolution of the following tractrix about its asymptotes is $\left(\frac{2}{3}\right)\pi a^3$.

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न ट्रैक्करी का अपने अनन्त स्पर्शी के पारितः परिक्रमण से जनित आयतन $\left(\frac{2}{3}\right)\pi a^3$ है।

$$x = a\left(\cos t + \frac{1}{2} \log \tan^2 \frac{1}{2} t\right), \quad y = a \sin t$$

Ans. [MT-02, Page 247]

Q.30 Evaluate the following integral by changing the order of integration
निम्न समीकरण में समाकलन का क्रम बदलकर हल कीजिए।

$$\int_0^a \int_{\sqrt{ax}}^a \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - a^2 x^2}} dx dy$$

Ans. [MT-02, Page 289]

Q.31 Evaluate the following integral with the help of Dirichlet's integral
नीचे दिये समाकलन का मान डिरिचलेट समाकल की सहायता से ज्ञात कीजिए।

$$\iiint_V x^2 y dx dy dz$$

Where the region V is volume which is bounded following planes $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

जहाँ क्षेत्र V निम्न तलों से परिबद्ध आयतन है $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

Ans. [MT-02, Page 300]

Q.32 Solve the following Differential equation
दी गई अवकल समीकरण को हल कीजिए।

$$x \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy = \left[y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \right] dx$$

Ans. [MT-02, Page 332]

Q.33 Prove that the following series is divergent.
सिद्ध कीजिए कि दी गई श्रेणी अपसारी है।

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2} + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

Ans. (MT-02, Page 23)

Q.34 Find $\frac{ds}{dx}$ for the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के लिए $\frac{ds}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 64]

Q.35 If (यदि) $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$ then prove that तो सिद्ध करो कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

Ans. [MT-02, Page 113]

Q.36 Find the asymptotes of the following curve?

दिए गए वक्र की अन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

$$(y-2x)^2(3x+4y)+3(y-2x)(3x+4y)-5=0$$

Ans. [MT-02, Page 152]

Q.37 Find the Envelop of the ellipse $x = a \sin(\theta - \alpha)$, $y = b \cos \theta$ where α is parameter.

दीर्घवृत्त $x = a \sin(\theta - \alpha)$, $y = b \cos \theta$ जहाँ α प्राचल है, अन्वालोप ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 185]

Q.38 Find the value

मान ज्ञात कीजिए।

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy \, dx \, dy$$

Ans. [MT-02, Page 272]

Q.39 Find the value

मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^a e^{-4x} x^{3/2} dx$$

Ans. [MT-02, Page 319]

Q.40 Solve the Differential equation

अवकल समीकरण हल कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$$

Ans. [MT-02, Page 330]

Q.41 Solve the following differential equation.

दी गई अवकल समीकरण को हल कीजिए।

$$y \sin 2x \, dx - (1 + y^2 + \cos^2 x) dy = 0$$

Ans. [MT-02, Page 347]

Q.42 Prove that

सिद्ध करो कि $\beta(m, n) = \beta(n, m)$

Ans. [MT-02, Page 310]

Q.43 Evaluate the following integral, when

$$x, y, z > 0 \text{ and } \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$$

$$\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$$

समाकल $\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$ का मान ज्ञात कीजिये जबकि $x, y, z > 0$ व $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$

Ans. [MT-02, Page 300]

Q.44 Show that the eight points of intersection of the curve $xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 = a^2$ and its asymptotes lie on a circle whose centre is at the origin.

सिद्ध करो कि वक्र

$$xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 = a^2$$

तथा अनन्तस्पर्शी के 8 प्रतिच्छेद बिन्दु एक वृत्त पर स्थित है जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है।

Ans. [MT-02, Page 154]

Q.45 Show that the radius of curvature at a point $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ on the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ is $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$.

सिद्ध कीजिये कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के बिन्दु $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ पर वक्रता त्रिज्या $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$ होगी।

Ans. [MT-02, Page 90]

Q.46 If (यदि)

$$x \sin t + y \cos t = f'(t)$$

$$x \cos t - y \sin t = f''(t)$$

Then prove that (तो सिद्ध कीजिये कि)

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) + f''(t)$$

Ans. [MT-02, Page 65]

Q.47 Test the convergence of the following series.

निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Ans. [MT-02, Page 18]

Q.48 Find the volume of the solid formed by the revolution of the loop of the curve $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ about the x -axis.

वक्र $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ के लूप द्वारा x -अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण करने से बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 244]

Q.49 Find the envelop of the family of the curve $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1$ where α is parameter

वक्र कुल $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} = 1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, α प्राचल है।

Ans. [MT-02, Page 188]

Q.50 Find the position and nature of the following curve :

निम्न वक्र के द्विक बिन्दुओं की स्थिति तथा प्रकृति ज्ञात कीजिए।

$$x^3 - y^3 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$$

Ans. [MT-02, Page 165]

Q.51 If $z(x+y) = x^2 + y^2$ then prove that
यदि $z(x+y) = x^2 + y^2$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Ans. [MT-02, Page 103]

Q.52 Find the pedal equation of the following curve
वृत्त $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 71]

Q.53 Test convergence and absolute convergence of the following series.
निम्न श्रेणी के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण की जाँच कीजिए।

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$$

Ans. [MT-02, Page 29]

Q.54 Find the whole length of the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$
चक्रज $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ की सम्पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Ans. [MT-02, Page 232]

Q.55 Find the value
मान ज्ञात कीजिए।

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{y/x} dx dy$$

Ans. [MT-02, Page 272]

Q.15 Find the value
मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$